Лекция 21 Движение вязкой жидкости. Формула Пуазейля. Ламинарное и турбулентное течения, число Рейнольдса. Движение тел в жидкостях и газах. Подъемная сила крыла самолета, формула Жуковского.

Л-1: 8.6-8.7; Л-2: с.298-311

При движении реальной жидкости между ее слоями возникают *силы внутреннего трения*, или *силы вязкости*. Со стороны слоя, движущегося более быстро, за счет сил межмолекулярного сцепления действует ускоряющая сила, а со стороны слоя, движущегося более медленно, на более быстрый слой действует замедляющая сила. Эти силы направлены по касательной к поверхности слоев и называются силами внутреннего трения. В газах возникновение сил внутреннего трения обусловлено в основном переходом молекул между движущимися слоями.

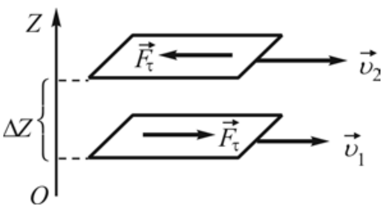

Рис. 21.1

Пусть два слоя жидкости, которые находятся на расстоянии Δz друг от друга, движутся со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ (рис. 21.1). Обозначим $\upsilon_2 - \upsilon_1 = \Delta\upsilon$. Отношение $\Delta\upsilon/\Delta z$ характеризует, как быстро изменяется скорость от слоя к слою в направлении, перпендикулярном скорости движения слоев, и называется *градиентом скорости*. Как показал Ньютон, сила внутреннего трения пропорциональна градиенту скорости и площади соприкасающихся слоев текущей жидкости

$$F = \eta \frac{\Delta\upsilon}{\Delta z} S,$$

где η – *коэффициент динамической вязкости*.

Как следует из формулы, коэффициент динамической вязкости η численно равен силе вязкости, возникающей между двумя слоями жидкости единичной площади при градиенте скорости, равном единице. Коэффициент динамической вязкости зависит от температуры: в жидкостях η с повышением температуры уменьшается, в газах – увеличивается. Это говорит о разном механизме возникновения сил внутреннего трения в жидкостях и газах.

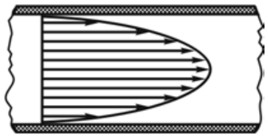

Рис. 21.2

Течение жидкости называется *ламинарным* (слоистым), если выделенный вдоль потока слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними. Ламинарное течение стационарно. На рис. 21.2 приведено распределение скорости по сечению трубы при ламинарном течении жидкости. Из рисунка видно, что градиент скорости имеет наибольшее значение возле стенок трубы.

Течение жидкости называется *турбулентным (вихревым)*, если в потоке происходит перемешивание частиц жидкости. Турбулентное течение нестационарно.

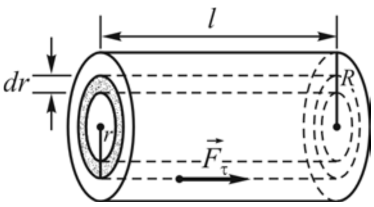

Рис. 21.3

Рассмотрим ламинарное течение вязкой жидкости по горизонтальной цилиндрической трубе радиусом R (рис. 21.3).

Объем жидкости, протекающей по трубе длиной l за время t при разности давлений на ее концах Δp определяется формулой:

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta p t\,.$$

Это соотношение было установлено французским физиком и физиологом Жаном Пуазейлем (1799–1869) и получило название *формулы Пуазейля*. Для турбулентного движения жидкости формула Пуазейля непригодна. Используя эту формулу, можно определить коэффициент вязкости жидкости или газа.

Приборы, с помощью которых измеряется вязкость жидкостей и газов, называются *вискозиметрами*.

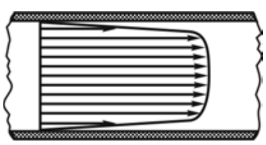

Рис. 21.4

При достаточно больших скоростях и определенных размерах трубы движение жидкости становится неустойчивым, ламинарное течение жидкости переходит в турбулентное. В случае турбулентного течения жидкости в каждой точке потока происходит быстрое изменение вектора скорости с течением времени. На рис. 21.4 показано распределение средних скоростей по сечению трубы при турбулентном течении. Средняя скорость в этом случае практически одинаковая по всему сечению. Турбулентное течение жидкости сопровождается образованием вихрей. Вихрь – это совокупность частиц жидкости или газа, которые совершают быстрое вращательное движение относительно мгновенной оси вращения. Английский физик Рейнольдс (1842–1912), исследуя характер течения жидкостей по трубам, установил, что переход от ламинарного течения к турбулентному определяется безразмерным числом, которое получило название *числа Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon l}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости, υ – средняя скорость потока по сечению трубы, η – коэффициент динамической вязкости, l – характерный размер сечения потока (при течении в длинных цилиндрических трубах l равно диаметру). При возрастании числа Рейнольдса течение жидкости из ламинарного переходит в турбулентное. Значения скорости $\upsilon_{\text{кр}}$ и числа Рейнольдса, при которых это происходит, получили название критических. Если жидкость течет по гладкой круглой трубе, $\mathrm{Re} = 2300$. Это означает, при $\mathrm{Re} < 2300$ возможно только ламинарное течение жидкости, а при $\mathrm{Re} > 2300$ течение может стать турбулентным.

Отношение $\nu = \eta/\rho$ называется *коэффициентом кинематической вязкости*, откуда

$$\mathrm{Re} = \frac{\upsilon l}{\nu}\cdot$$

Основной задачей гидроаэродинамики является изучение сил, с которыми жидкости и газы действуют на тело, движущееся в них. Согласно принципу относительности движения все физические явления, возникающие между двумя телами, зависят только от относительной скорости движения этих тел, что и позволяет задачу о движении тела в неподвижной жидкости заменять более простой в экспериментальном плане задачей об обтекании потоком жидкости неподвижного тела. Рассмотрим силы, действующие на тело в движущейся жидкости или газе. В общем случае на тело будет действовать суммарная сила $\vec{F}$,

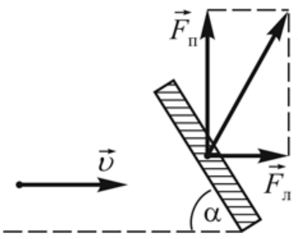

Рис. 21.5

направленная под некоторым углом к направлению движения (рис. 21.5). Эту силу можно разложить на две составляющие, одна из которых $\vec{F}_л$ направлена в сторону, противоположную движению тела (или в сторону движения потока, набегаемого на тело) и называется *силой лобового сопротивления*, а вторая $\vec{F}_п$ перпендикулярна к этому направлению и называется *подъемной силой*. Если тело симметрично относительно направления потока, на него может действовать только лобовое сопротивление, подъемная сила в этом случае равна нулю. Величины сил $\vec{F}_л$ и $\vec{F}_п$ зависят от величины скорости, а также от формы тела.

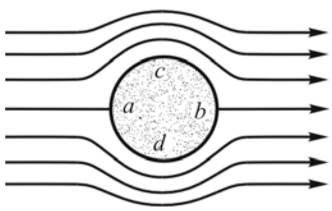

Рис. 21.6

Поместим в поток идеальной жидкости бесконечный цилиндр, ось которого перпендикулярна линиям тока невозмущенного потока (рис. 21.6). Идеальная жидкость скользит по поверхности цилиндра и полностью обтекает его. В результате этого картина линий тока будет абсолютно симметрична как относительно горизонтальной плоскости, проходящей через точки *a* и *b*, так и относительно вертикальной плоскости, проходящей через точки *c* и *d*. Давление вблизи точек *a* и *b* одинаково и больше, чем в невозмущенном потоке (потому что скорость в этих точках меньше); давление в точках *c* и *d* также одинаково и меньше, чем в невозмущенном потоке (скорость в данных точках больше). Поэтому сумма всех сил давления, действующих на поверхность цилиндра, будет равна нулю. Аналогичный результат получается и для тел произвольной формы. Таким образом, пришли к выводу, что при равномерном прямолинейном движении тела произвольной формы, но конечных размеров внутри несжимаемой жидкости, лишенной вязкости, оно не должно испытывать никакого сопротивления. Это положение было высказано французским механиком и математиком Жаном Даламбером (1717–1783) в 1744 г. и швейцарским математиком и физиком Леонардом Эйлером (1707–1783) в 1745 г. и получило название *парадокса Даламбера–Эйлера*.

Рассмотрим теперь процесс обтекания тела реальной жидкостью. При небольших скоростях потока, когда число Рейнольдса меньше критического, тонкий слой жидкости прилипает к поверхности цилиндра, образуя так называемый *пограничный слой*.

Характер течения в пограничном слое в зависимости от величины числа Рейнольдса может быть как ламинарным, так и турбулентным. В пограничном слое скорость потока жидкости изменяется от нуля около поверхности цилиндра до значения скорости в невозмущенном потоке. Иначе говоря, в пограничном слое появляется градиент скорости. Это приводит к тому, что цилиндр начинает оказывать сопротивление движению жидкости. При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} < 10$) течение жидкости в пограничном слое ламинарное и картина линий тока жидкости при обтекании шара аналогична картине тока при обтекании шара идеальной жидкостью. Следовательно, результирующая сил давления, действующих на шар, и в данном случае равна нулю. Направление результирующей сил вязкости, которые действуют на цилиндр, совпадает с направлением потока.

Опытным путем установлено, что суммарная сила вязкости при небольших скоростях движения пропорциональна скорости потока

$$F_{\text{c}} = C_x \upsilon ,$$

где C_x – коэффициент, который зависит от вязкости жидкости, размеров и формы тела, его ориентации в потоке.

Английский физик и математик Джордж Стокс (1819–1903), исследуя движение шаров при значениях числа Рейнольдса, меньших единицы, получил аналитическое выражение для вычисления коэффициента пропорциональности C_x

$$C_x = 6\pi\eta r ,$$

где r – радиус шара.

С учетом этого результирующая сила вязкости, действующая на шар,

$$F_{\text{c}} = 6\pi\eta r\upsilon .$$

Это соотношение получило название *формулы Стокса.* Формула Стокса лежит в основе одного из методов определения коэффициента вязкости жидкостей.

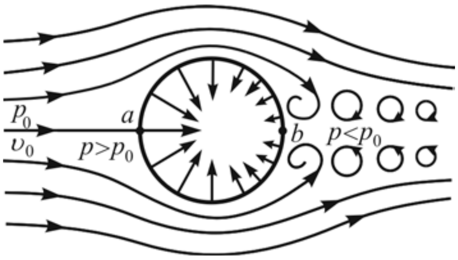

Рис. 21.7

При значении числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=10^4$ толщина пограничного слоя становится меньше 0,01 диаметра шара. В этом случае силы вязкости, действующие в пограничном слое, оказывают существенное влияние на характер течения жидкости. Линии тока жидкости отрываются от задней поверхности шара, в результате чего образуются вихри (рис. 21.7). При больших скоростях потока частицы жидкости за телом останавливаются и начинают двигаться против потока. Энергия вихрей при этом расходуется на нагревание жидкости. Давление в пространстве за телом оказывается пониженным. Обозначим давление и скорость в невозмущенном потоке p_0, υ_0 соответственно. Используя уравнение Бернулли, получим давление в точке *a*:

$$p_a = p_0 + \frac{\rho\upsilon_0^2}{2}.$$

Из последней формулы следует, что давление в точке *a* больше давления в невозмущенном потоке на величину динамического давления $\rho\upsilon_0^2/2$. В то же время давление в точке *b* меньше давления в невозмущенном потоке: $p_b < p_0$. Следовательно, результирующая сил давления, действующих на шар, отличается от нуля и направлена вдоль потока жидкости. Результирующая сил давления, которые действуют на шар со стороны потока жидкости, получила название *силы лобового сопротивления (сопротивления давления)*

$$F_{\text{л}} = C_x S \frac{\rho\upsilon_0^2}{2},$$

где C_x – *коэффициент лобового сопротивления*, который зависит от числа Рейнольдса, формы тела, его ориентации в потоке и вязкости жидкости; S – так называемое *миделево сечение*, которое представляет собой наибольшую площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной потоку. На рис. 21.8 при-

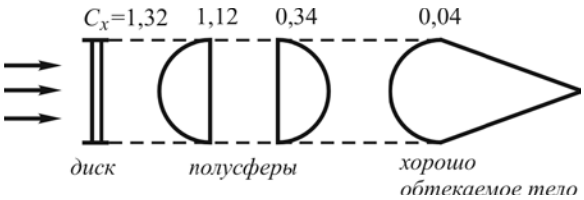

Рис. 21.8

ведены значения C_x для тел разной формы. Поскольку миделевы сечения тел одинаковые, то основное влияние на силу лобового сопротивления оказывает форма тела, вокруг которого происходит вихреобразование.

Для крыла самолета найдена наилучшая по обтекаемости форма, так называемый *профиль Жуковского*, который используется при создании самолетов. Крыло самолета имеет асимметричный профиль. В передней части оно плавно закруглено, а задняя его кромка заострена. Кроме этого, крыло ориентируется по отношению к направлению обтекающего потока воздуха под некоторым небольшим углом α, называемым *углом атаки* (рис. 21.9). Обтекаемое крыло с профилем Жуковского так построено, что, рассекая воздух, образует у своего острого края пониженное давление. Следовательно, скорость обтекания крыла у задней кромки достигает максимума при большом градиенте скорости. В результате на этой кромке возникает мощный вихрь (для изображенного на рисунке случая – против часовой стрелки). Этот первый вихрь, образовавшийся в начале движения, называют «*разгонным вихрем*». Достаточно развившись, как и другие вихри, он срывается с кромки и уносится воздушным потоком. На его месте возникает следующий и т.д. На задней кромке при полете самолета устанавливается постоянное явление срыва струй, обтекающих крыло.

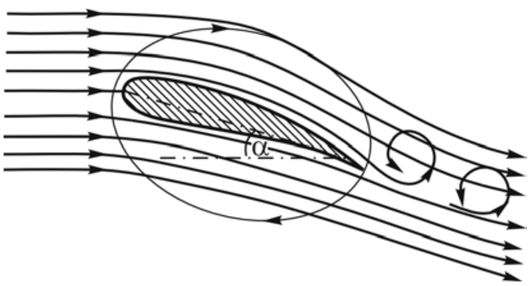

Рис. 21.9

Каждый такой вихрь имеет свой момент импульса. Поскольку внешних моментов сил, действующих на систему крыло–воздух, нет (изолированная система), то момент импульса этой системы должен оставаться постоянным (равным нулю). Это означает, что в воздухе около крыла должно возникнуть какое-то круговое движение воздуха, которое бы обладало одинаковым с вихрем моментом импульса, но

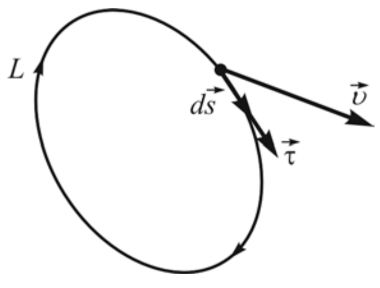

Рис. 21.10

противоположного направления. Жуковский показал, что вместе с вихрем в воздухе около крыла возникает *круговое течение – циркуляция* Γ воздушных масс, в нашем случае – по часовой стрелке.

Жуковский впервые предложил рассматривать обтекание крыла идеальной жидкостью или газом как одновременно существующие два течения идеальной жидкости: плавное обтекание крыла и циркуляционное течение вокруг крыла.

Наличие циркуляции вокруг крыла приводит к увеличению относительной скорости потока воздуха над крылом, поскольку там скорость циркуляции по направлению совпадает со скоростью плавного обтекания крыла воздухом. Под крылом же скорость потока воздуха относительно крыла уменьшается, поскольку там скорости указанных двух движений противоположны друг другу. В результате давление воздуха на крыло снизу вверх возрастает, что и проявляется как подъемная сила.

Определяющую роль в возникновении подъемной силы крыла самолета играет физическая величина, которая называется *циркуляцией скорости*. Циркуляция скорости – кинематическая характеристика течения жидкости или газа, служащая мерой интенсивности образования вихрей.

Жуковский показал, что для тонкого крыла циркуляция скорости может быть подсчитана теоретически, и получил соответствующую формулу

$$\Gamma = \frac{1}{2}\pi d \upsilon \alpha ,$$

где d – *длина хорды крыла* (расстояние по потоку от передней до задней кромки крыла), α – угол атаки.

Найдем подъемную силу крыла самолета. Для этого возьмем тонкое крыло длиной l (*размах крыла*), имеющее хорду d, и поместим его в воздушный поток под углом атаки α (рис. 21.11). Выделим на некотором расстоянии от передней кромки крыла перпендикулярно хорде элементарную полоску шириной dx и длиной l.

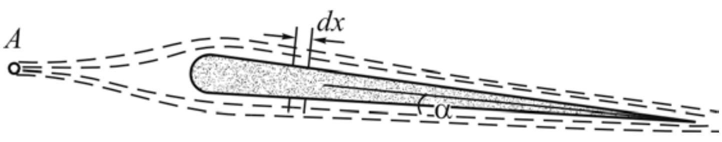

Рис. 21.11

Запишем уравнение Бернулли для двух трубок тока, одна из которых проходит сверху, а вторая – снизу крыла вдоль хорды. Одно сечение этих трубок возьмем в невозмущенной области потока, в точке *A*, где давление p_0, а скорость υ_0; вторые в местах выделенной полоски, где соответствующие параметры воздуха над крылом p_1, υ_1 и под крылом p_2, υ_2. Поскольку угол атаки мал, то трубки тока можно считать горизонтальными и соответствующие уравнения будут иметь вид:

$$p_0 + \frac{\rho\upsilon_0^2}{2} = p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} \text{ – для верхней трубки тока,}$$

$$p_0 + \frac{\rho\upsilon_0^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} \text{ – для нижней трубки тока.}$$

Откуда получим

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2}.$$

Разность давлений на выделенную полоску под крылом и над ним будет равна

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_1 + \upsilon_2\right)\left(\upsilon_1 - \upsilon_2\right).$$

При малых углах атаки скорости υ_1 и υ_2 близки к скорости υ_0, следовательно, справедливо приближенное равенство

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 = 2\upsilon_0.$$

Тогда

$$p_2 - p_1 = \rho\upsilon_0\left(\upsilon_1 - \upsilon_2\right).$$

Подъемная сила, которая действует на выделенную полоску крыла,

$$dF_{\text{п}} = \left(p_2 - p_1\right)dS = \left(p_2 - p_1\right)l\,dx,$$

где $dS = l\,dx$ – площадь выделенной полоски.

Таким образом,

$$dF_{\text{п}} = \rho\upsilon_0\left(\upsilon_1 - \upsilon_2\right)l\,dx.$$

Для нахождения результирующей подъемной силы, действующей на все крыло, необходимо последнее соотношение проинтегрировать по всей длине хорды

$$F_{\text{п}} = \rho \upsilon_0 l \int_0^d \left(\upsilon_1 - \upsilon_2\right) dx. \ (*)$$

Интеграл, входящий в эту формулу, представляет собой циркуляцию скорости

$$\Gamma = \int_0^d \left(\upsilon_1 - \upsilon_2\right) dx.$$

Откуда подъемная сила крыла самолета

$$F_{\text{п}} = \rho l \upsilon_0 \Gamma.$$

Полученное выражение называют *формулой Жуковского*. После подстановки значения Γ в формулу (*) получим

$$F_{\text{п}} = \frac{1}{2}\pi\rho\upsilon^2 l\, d\alpha.$$

Подъемная сила прямо пропорциональна плотности среды, квадрату скорости и углу атаки.

Кроме подъемной силы $F_{\text{п}}$ крыло испытывает и силу лобового сопротивления $F_{\text{л}}$. Отношение $k = F_{\text{п}}/F_{\text{л}}$ называют *качеством крыла*.

Следует отметить, что в возникновении подъемной силы крыла самолета определяющую роль играют силы вязкого трения. Для подтверждения этого рассмотрим эксперимент, в котором вращающийся цилиндр, установленный на платформе, которая может двигаться с ничтожно малым трением по рельсам, расположенным на горизонтальной плоскости, в направленном воздушном потоке без циркуляции.

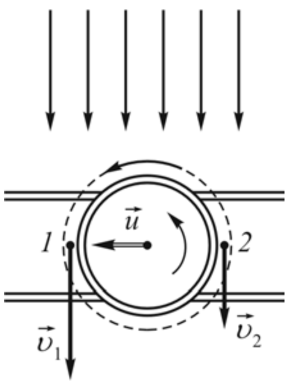

Рис 21.12

За счет сил внутреннего трения вокруг вращающегося цилиндра образуется пограничный слой, в котором увлекаемые цилиндром молекулы воздуха вращаются вместе с ним (рис. 21.12). В результате скорость потока в точке *2* уменьшится по сравнению со скоростью в невозмущенном потоке, в точке *1* скорость потока увеличится по сравнению со скоростью в невозмущенном потоке. В соответствии с уравнением Бернулли давление в точке *2* окажется выше давления в точке *1*. Эта разность давлений вызовет появление поперечной силы давления, которая, действуя на цилиндр, приведет платформу в движение со скоростью $\vec{u}$ в указанном на рисунке направлении. Возникновение поперечной силы при вращении цилиндра, помещенного в поток газа, получило название *эффекта Магнуса* в честь немецкого физика и химика Г. Магнуса (1802–1870). Его можно проиллюстрировать следующим примером.

Пусть легкий бумажный цилиндр скатывается с наклонной плоскости (рис. 21.13). Благодаря трению он захватывает прилежащие слои воздуха и сообщает им момент импульса $\vec{L}$ (воздух вращается вместе с цилиндром). Поэтому скорость обтекания воздухом с одной стороны цилиндра (для рис. 21.13 слева) оказывается меньше, чем с другой.

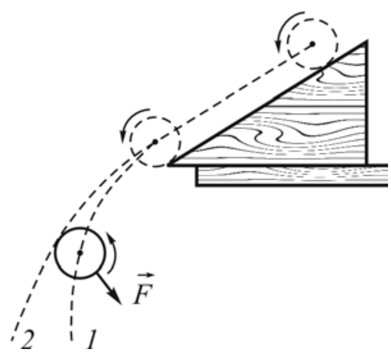

Рис. 21.13

Соответственно давление воздуха слева от цилиндра окажется больше давления воздуха справа, что обусловит возникновение поперечной относительно потока воздуха силы, направленной вправо. В результате на цилиндр будет действовать сила F, являющаяся равнодействующей поперечной силы и силы тяжести цилиндра. Под действием этой силы F при падении с наклонной плоскости цилиндр опишет траекторию *1*, которая более крутая, чем траектория, которую описал бы тяжелый (например, деревянный) цилиндр, для которого эта поперечная сила мала по сравнению с силой тяжести.

Аналогичная сила возникает и при набегании потока на вращающийся шар, чем объясняется непрямолинейный полет закрученного теннисного или футбольного мяча. Направлена поперечная сила всегда от той стороны вращающегося тела, на которой направление вращения и направление потока противоположны, к той стороне, на которой эти направления совпадают.