Лекция 23 Уравнения движения простейших механических колебательных систем при отсутствии трения. Пружинный, математический, физический и крутильный маятники. Кинетическая, потенциальная и полная энергия колебательного движения.

Л-1: 9.3-9.4; Л-2: с.330-338

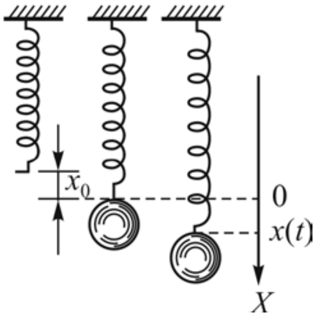


Рис. 23.1

Пружинным маятником называют колебательную систему, которая состоит из тела массой m, подвешенного на пружине жесткостью k (рис. 23.1). Рассмотрим вертикальное движение этого тела под действием силы упругости пружины и силы тяжести после толчка. Допустим, масса пружины настолько мала, что ее при колебаниях можно не учитывать.

Если вывести груз из состояния равновесия, то со стороны деформированной пружины на него действует сила, направленная к положению равновесия и пропорциональная (в пределах упругости) смещению.

Поместим начало отсчета оси X в точку, соответствующую положению равновесия тела. Под действием силы тяжести пружина растянута на величину x_0, которая определяется соотношением

$$mg = kx_0 .$$

При смещении груза на величину x из положения равновесия сила, действующая на тело со стороны пружины, равна $-k\left(x + x_0\right)$. Второй закон Ньютона будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = -k\left(x + x_0\right) + mg .$$

После преобразований последнее уравнение можно записать: $m\ddot{x} = -kx$. Полученное уравнение тождественно полученному ранее.

Таким образом, рассматриваемая колебательная система также будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Математический маятник представляет собой небольшой массивный груз, подвешенный на нити (или легком стержне) и совершающий колебания под действием силы тяжести. Размеры груза малы по сравнению с расстоянием от точки подвеса до его центра тяжести. По своим свойствам идеальному математическому маятнику наиболее соответствует система из очень легкой, практически нерастяжимой нити и подвешенного к ней груза, размеры которого малы по сравнению с длиной нити, а масса велика по сравнению с ее массой.

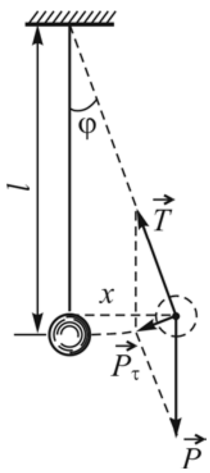


Рис. 23.2

Рассмотрим малые собственные колебания такого маятника. Малыми называют колебания, при которых угол отклонения от состояния равновесия не превышает 3–5°. (рис. 23.2). На груз маятника массой m действуют сила тяжести $P = mg$, направленная вниз, и сила натяжения нити T, направленная вдоль нити к точке подвеса. Если вывести груз из положения равновесия, то под действием равнодействующей сил тяжести и натяжения нити P_τ, маятник начнет совершать колебания около положения равновесия. Запишем уравнение движения для математического маятника, который находится в поле силы тяжести и отклонен от положения равновесия на угол φ.

Когда маятник находится в отклоненном состоянии, то на него будет действовать сила $P_\tau = mg\sin\varphi$. Она направлена по касательной к траектории движения маятника в сторону положения равновесия. Легко заметить, что эта сила действует в сторону, противоположную направлению возрастания смещения x, поэтому

$$m\ddot{x} = -mg\sin\varphi.$$

Полученное уравнение является уравнением движения математического маятника. Его решение довольно сложное. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда отклонения маятника от состояния равновесия малы, то можно считать, что синус угла равен его величине ($\sin\varphi \approx \varphi$). Смещение по дуге можно принять приближенно равным смещению вдоль горизонтальной хорды и синус угла φ заменить отношением смещения x к длине нити l, переписав это уравнение:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x.$$

Если ввести обозначение $g/l = \omega_0^2$, то получим:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Таким образом, колебания математического маятника при малых отклонениях являются гармоническими с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.(*)$$

Полученная формула показывает, что период колебаний маятника зависит от его длины и ускорения силы тяжести, но не зависит от амплитуды. Это свойство называется изохронностью колебаний маятника.

Как следует из вышесказанного, сила, которая возвращает маятник к положению равновесия, является составляющей силы тяжести и для малых отклонений маятника пропорциональна его смещению из состояния равновесия

$$P_\tau = -\frac{mg}{l}x.$$

Таким образом, сила P_τ аналогична упругой силе. Колебания, которые она вызывает, при малых углах φ совпадают по характеру движения с колебаниями, вызванными упругой силой.

Силы, не упругие по своей природе, но аналогичные им по виду зависимости от смещения, называются *квазиупругими* (от лат. *quasi* – как будто, будто бы).

На применении формулы (*) основан принцип действия маятниковых приборов, которые используются в гравиметрической разведке. С помощью этих приборов можно определить разность плотности пород, образующих геологические структуры, способные вызвать аномальность в наблюдаемом гравитационном поле Земли. Это осуществляется измерением разности силы тяжести в изучаемых и опорных точках.

Физическим маятником называют твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси подвеса.

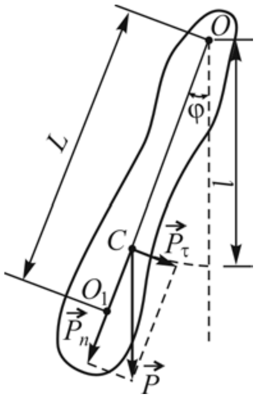


Рис. 23.3

На рис. 23.3 изображено сечение физического маятника, совершающего свободные колебания вокруг горизонтальной оси *O*, перпендикулярной плоскости чертежа. Расстояние от центра инерции *C* до оси *O* равно l.

Отклоним маятник от состояния равновесия на небольшой угол φ. Составляющая P_n силы тяжести P, направленная вдоль *OC*, уравновешивается силой реакции оси *O*. Составляющая $P_\tau = mg\sin\varphi$, перпендикулярная *OC*, стремится вернуть маятник в положение равновесия. Для малых углов отклонения можно считать $P_\tau = mg\varphi$. Под действием P_n возникает момент силы тяжести $M = -mg\varphi l$. (Знак «минус» показывает, что направление момента M противоположно направлению углового отклонения.)

По основному закону динамики для вращательного движения тела

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi,$$

где I – момент инерции тела относительно горизонтальной оси, которая проходит через точку *O* перпендикулярно плоскости чертежа. Введя обозначение $mgl/I = \omega_0^2$, последнее уравнение можно записать: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$. По виду оно похоже на уравнение для математического маятника. Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение физического маятника изменяется со временем по гармоническому закону с периодом

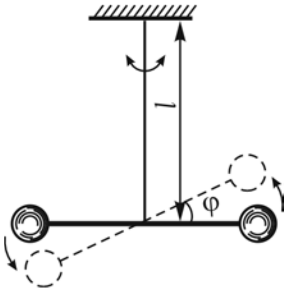
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Как видно из полученных формул, математический маятник длиной

$$L = \frac{I}{ml}$$

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Величину L называют *приведенной длиной* физического маятника. Таким образом, приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Рассмотрим *крутильный маятник*, который состоит из коромысла с двумя грузами на концах, подвешенные на упругой проволоке длиной l и радиусом r (рис. 23.4). Пусть маятник совершает крутильные колебания в горизонтальной плоскости. Будем считать, что на него действует только упругая сила со стороны закрученной проволоки. Уравнение движения маятника в этом случае будет иметь вид:



$$I\ddot{\varphi} = M .$$

Рис. 23.4

В данном уравнении I – момент инерции коромысла и грузов относительно оси вращения; M – вращательный момент, который возникает в проволоке при крутильных колебаниях

$$M = -G\frac{\pi r^4}{2l}\varphi,$$

где G – модуль сдвига материала проволоки; φ – угол закручивания проволоки. Знак «минус», как и в случае физического маятника, учитывает, что направления момента M и приращения угла закручивания проволоки $d\varphi$ противоположны.

Подставив значение M в предыдущую формулу, после преобразований получим уравнение для углового смещения крутильного маятника: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$, где $\omega_0^2 = G\pi r^4 / (2Il)$.

Таким образом, выведенный из состояния равновесия крутильный маятник будет совершать гармонические колебания относительно оси, которая совпадает с осью симметрии проволоки. Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}},$$

где $D = G\pi r^4 / (2l)$ – коэффициент упругости при деформации кручения.

Свободные, или собственные, колебания – это такое движение системы, которое происходит при отсутствии внешних воздействий. Поскольку упругие или квазиупругие силы, под действием которых происходят гармонические колебания, являются консервативными, то полная энергия таких колебаний должна оставаться постоянной. Полная энергия колеблющейся системы слагается из кинетической энергии элемента системы, который движется и имеет массу, и потенциальной энергии упругой части системы, равной работе квазиупругой силы. В процессе колебаний величина каждой из них периодически меняется, происходит преобразование кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Пусть система гармонически колеблется по закону

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha_0\right).$$

Кинетическая энергия системы

$$E_к = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \alpha_0\right),$$

потенциальная энергия

$$E_п = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_0 t + \alpha_0\right)$$

или

$$E_п = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\cos^2\left(\omega_0 t + \alpha_0\right),$$

где $k = m\omega_0^2$.

Сравнивая выражения для $E_К$ и $E_П$, видим, что значения кинетической и потенциальной энергии колеблются со сдвигом фаз, равным $\pi/2$. Так, минимуму кинетической энергии в состоянии максимального отклонения соответствует максимум потенциальной энергии. При прохождении положения равновесия система имеет максимальную кинетическую энергию. Потенциальная же энергия равна нулю, потому что в положении равновесия отсутствуют квазиупругие силы. При дальнейшем движении квазиупругие силы выполняют отрицательную работу, в результате чего кинетическая энергия уменьшается, а потенциальная энергия увеличивается. Зависимость потенциальной энергии колеблющегося тела (например, пружинного маятника), от смещения изображена на рис. 23.5.

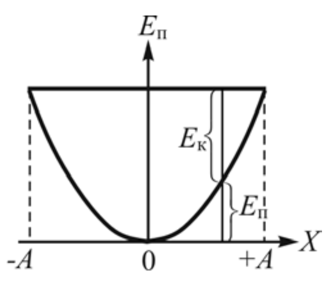


Рис. 23.5

Полная энергия системы $E = E_К + E_П = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$ не зависит от состояния системы.