# Лекция 24 Сложение колебаний одного направления с одинаковыми и разными частотами. Биения.

*Л-1: 9.5; Л-2: с.320-324, 330*

Возможны случаи, когда тело участвует в двух и более колебаниях, которые происходят вдоль одного или разных направлений. Например, если на столе рессорного вагона подвесить на пружине шарик, то движение шарика относительно поверхности Земли будет состоять из колебаний одинакового направления: вагона относительно Земли и шарика относительно вагона.

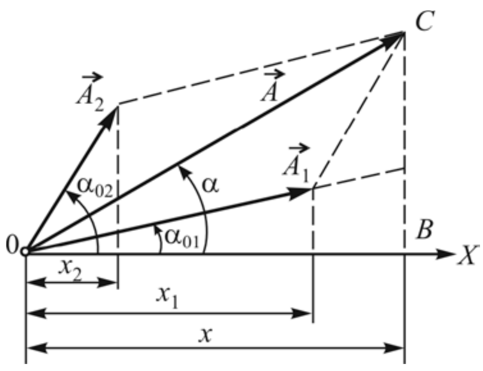


*Рис. 24.1*

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и частоты, которые происходят с некоторой разностью фаз и имеют разные амплитуды. Смещение $x_1$ от положения равновесия колеблющегося тела будет равно сумме смещений $x_1$ и $x_2$:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_{01}),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_{02}).$$

Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис. 24.1). Поскольку вектор $\vec{A}_1$ в начальный момент времени располагается под углом $\alpha_{01}$ к оси *x*, а вектор $\vec{A}_2$ – под углом $\alpha_{02}$, то в результате сложения оба вектора будут вращаться против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью $\omega_0$. Следовательно, угол между векторами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ все время остается постоянным и равным $\alpha_{02} - \alpha_{01}$.

По правилам сложения векторов построим суммарный вектор $\vec{A}$. Вектор $\vec{A}$ будет представлять суммарное колебание. Он вращается с той же угловой скоростью $\omega_0$, что и векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Проекция этого вектора на ось *X* равна сумме проекций слагаемых векторов: $x = x_1 + x_2$.

Таким образом, приходим к выводу, что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой $\omega_0$, амплитудой $A$ и начальной фазой $\alpha$.

Из рис. 24.1 имеем:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left[\pi - \left(\alpha_{02} - \alpha_{01}\right)\right] =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\alpha_{02} - \alpha_{01}\right).(*)$$

Начальная фаза $\alpha$ результирующего колебания определяется формулой

$$tg\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_{01} + A_2\sin\alpha_{02}}{A_1\cos\alpha_{01} + A_2\cos\alpha_{02}}.$$

Как видно, амплитуда $A$ результирующего колебания зависит от разности начальных фаз $\alpha_{02} - \alpha_{01}$ слагаемых колебаний. Исходя из того, что разность $\alpha_{02} - \alpha_{01}$ с течением времени не изменяется (такие *синхронные колебания* называются *когерентными*), по формуле (*) можно получить значения амплитуды $A$. Поскольку косинус любого угла не может быть больше +1 и меньше –1, то возможные значения амплитуды заключены в пределах:

$$A_1 + A_2 \geq A \geq \left|A_2 - A_1\right|.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

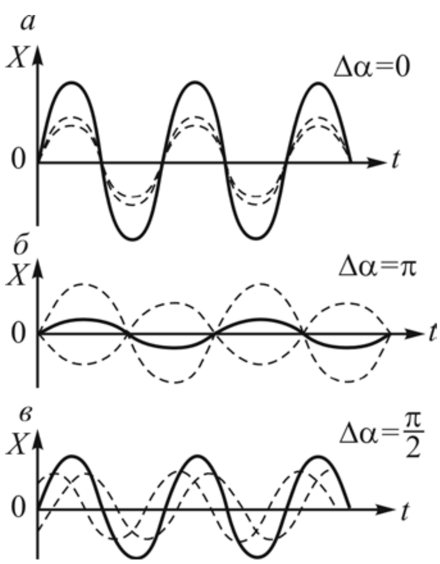


*Рис. 24.2*

1. Если сдвиг фаз между слагаемыми колебаниями равен нулю или четному числу $\pi$ $(2n\pi)$, где $n$ – целое число, то

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = \left(A_1 + A_2\right)^2.$$

Откуда $A = A_1 + A_2$, т.е. при сдвиге фаз $\alpha_{02} - \alpha_{01} = 2n\pi$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots)$ амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд слагаемых колебаний (рис. 24.2, *а*).

Если $A_1 = A_2$, то амплитуда результирующего колебания удваивается. Поскольку энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, то очевидно, что в этом случае происходит увеличение энергии в четыре раза.

2. Если сдвиг фаз равен нечетному числу $\pi$, т.е. $\alpha_{02}-\alpha_{01}=(2n+1)\pi$, то

$$A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2=(A_2-A_1)^2$$

или $A=|A_2-A_1|$. Берем модуль разности $|A_2-A_1|$, поскольку из определения амплитуды колебаний следует, что амплитуда $A$ не может быть отрицательной.

Как видно, при разности фаз $\alpha_{02}-\alpha_{01}=(2n+1)\pi$ амплитуда результирующего колебания равна модулю разности амплитуд складываемых колебаний (рис. 24.2, *б*). Колебания в этом случае взаимно ослабляются ($A=0$ при $A_1=A_2$).

3. Если сдвиг фаз равен нечетному числу $\pi/2$, т. е. $\alpha_{02}-\alpha_{01}=(2n+1)\pi/2$, то $A^2=A_1^2+A_2^2$ и $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ (рис. 24.2, *в*). В этом случае энергия результирующего колебания равна сумме энергий складываемых колебаний.

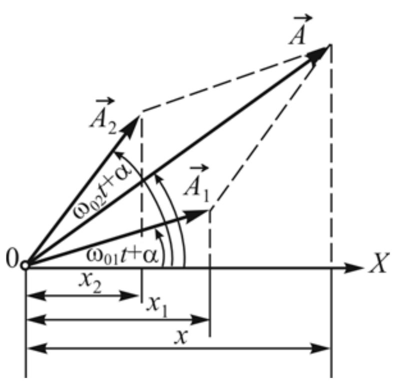


*Рис. 24.3*

Рассмотрим случай, когда складываемые гармонические колебания имеют одинаковые направления, но разные частоты. На векторной диаграмме колебаний (рис. 24.3) слагаемые векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с разными угловыми скоростями, в результате чего угол между ними с течением времени изменяется. В итоге изменяется и результирующая амплитуда $A$.

Пусть слагаемые колебания имеют циклические частоты $\omega_{01}$ и $\omega_{02}$. Разность фаз слагаемых колебаний изменяется со временем. Для упрощения дальнейшего рассмотрения в качестве начального момента времени можно взять такой, при котором начальные фазы обоих колебаний одинаковы. Уравнения колебаний в этом случае имеют вид:

$$x_1=A_1\cos(\omega_{01}t+\alpha),$$

$$x_2 = A_2 \cos\left(\omega_{02} t + \alpha\right).$$

Будем считать, что $\omega_{02} > \omega_{01}$.

Найдем разность фаз слагаемых колебаний и подставим в формулу для квадрата амплитуды. Получим следующее выражение для квадрата результирующей амплитуды:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\omega_{02} - \omega_{01}\right)t \,.(*)$$

Как видим, амплитуда *A* результирующего колебания изменяется с течением времени с некоторой частотой. Угловая скорость вращения результирующего вектора $\vec{A}$ при этом непостоянна, а результирующее движение не является гармоническим колебанием.

Вызывает интерес результат сложения двух колебаний, круговые частоты которых очень мало отличаются друг от друга, а амплитуды равны ($A_1 = A_2$).

Считая, что в формуле (*) $A_1 = A_2$, получаем

$$A^2 = 2A_1^2\left[1+\cos\left(\omega_{02} - \omega_{01}\right)t\right] = 4A_1^2 \cos^2 \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2} t \,,$$

откуда

$$A = \left|2A_1 \cos\frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2} t\right|.$$

В соответствии с вышепринятым берем также модуль амплитуды.

Как видно, амплитуда результирующего колебания периодически изменяется по величине. Период модуля косинуса равен $\pi$. Следовательно, период $\tau$ изменения амплитуды результирующего колебания равен промежутку времени, за который аргумент косинуса изменяется на $\pi$, т.е. $\tau$ определяется из условия $\left(\omega_{02} - \omega_{01}\right)\tau/2 = \pi$, откуда $\tau = 2\pi/\left(\omega_{02} - \omega_{01}\right)$.

Частота изменения амплитуды результирующего колебания равна разности частот $\nu_2 - \nu_1$ слагаемых колебаний.

$$\nu_б = \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1.$$

Угол, который образует результирующий вектор $\vec{A}$ с осью *X*, как видно из рис. 24.3, равен полусумме циклических частот слагаемых колебаний

$$\frac{\omega_{01}+\omega_{02}}{2}t+\alpha.$$

Чтобы получить результирующее смещение $x$, найдем проекцию вектора $\vec{A}$ на ось *X*

$$x = A\cos\left(\frac{\omega_{01}+\omega_{02}}{2}t+\alpha\right),$$

или

$$x = \left|2A_1\cos\frac{\omega_{02}-\omega_{01}}{2}\right|\cos\left(\frac{\omega_{01}+\omega_{02}}{2}t+\alpha\right).$$

Исходя из предположения, что $\omega_{02}$ мало отличается от $\omega_{01}$, делаем вывод, что величина $\omega_б = (\omega_{02}-\omega_{01})/2$ мала по сравнению с $(\omega_{02}+\omega_{01})/2$. Поэтому результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое, совершаемое с круговой частотой $(\omega_{01}+\omega_{02})/2$, амплитуда которого медленно периодически изменяется с течением времени. Такие колебания называются *биениями*. Частоту изменения амплитуды $\nu_б$ называют *частотой биений*.

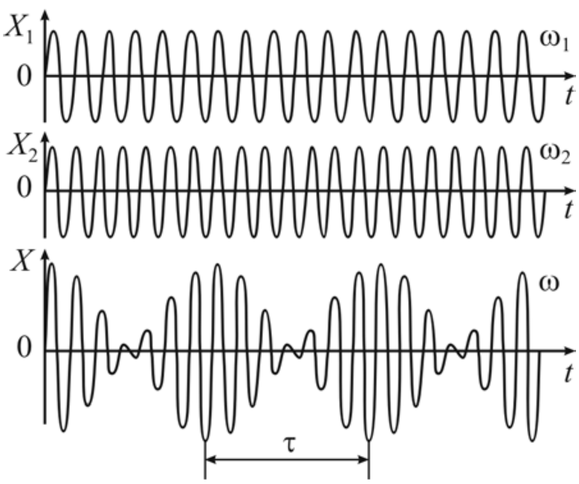


*Рис. 24.4*

На рис. 24.4 показано возникновение биений, т.е. периодического изменения амплитуды при сложении двух колебаний близких частот. Явление биений можно часто наблюдать при звуковых и электрических колебаниях. Например, можно вызвать одновременное звучание двух камертонов, которые имеют близкие частоты свободных колебаний.