Лекция 25 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний Фигуры Лиссажу.

Л-1: 9.6; Л-2: с.325-330

Под числом степеней свободы механической системы понимают число независимых координат, необходимых для описания состояния этой системы. Если колебательная система имеет больше чем одну степень свободы, то при колебаниях могут изменяться все координаты, которые соответствуют этим степеням свободы системы.

В качестве примера колебательной системы, имеющей две степени свободы, рассмотрим тяжелый шар, подвешенный на длинной тонкой нити (математический маятник). При определенных внешних воздействиях этот шар может совершать два колебания во взаимно перпендикулярных направлениях. Если возбудить одновременно оба колебания, то шар будет двигаться по некоторой сложной траектории, форма которой зависит от частот и разности фаз обеих колебаний.

Рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты ω_0. Пусть материальная точка участвует в двух колебаниях, которые совершаются вдоль координатных осей *X* и *Y*. Уравнения колебаний будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\left(\omega_0 t+\alpha_1\right), \\ y &= B\cos\left(\omega_0 t+\alpha_2\right). \end{aligned}\right\}$$

Найдем уравнение траектории результирующего движения точки, для чего из приведенных уравнений исключим время t. Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{x}{A}=\cos\omega_0 t\cos\alpha_1-\sin\omega_0 t\sin\alpha_1, \quad (1)$$

$$\frac{y}{B}=\cos\omega_0 t\cos\alpha_2-\sin\omega_0 t\sin\alpha_2. \quad (2)$$

Умножив выражение (1) на $\cos\alpha_2$ и (2) на $\cos\alpha_1$, после вычитания из первого равенства второго, получим:

$$\frac{x}{A}\cos\alpha_2-\frac{y}{B}\cos\alpha_1=\sin\omega_0 t\sin\left(\alpha_2-\alpha_1\right).$$

Теперь умножим выражение (1) на $\sin\alpha_2$, а (2) на $\sin\alpha_1$ и также вычтем из первого равенства второе

$$\frac{x}{A}\sin\alpha_2 - \frac{y}{B}\sin\alpha_1 = \cos\omega_0 t \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Возведя в квадрат и сложив почленно последние два уравнения, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (3)$$

Как видим, траекторией результирующего движения является эллипс. Характеристики этого эллипса зависят от разности фаз слагаемых колебаний.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть разность фаз слагаемых колебаний $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$. Уравнение траектории результирующего колебания в этом случае:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0 \text{ или } \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда $x = yA/B$.

Получили уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью *X* угол, тангенс которого равен отношению амплитуд B/A (рис. 25.1, *а*). Вдоль этой прямой точка совершает гармоническое колебание с циклической частотой ω_0, а смещение на прямой равно $s = \sqrt{x^2 + y^2}$.

С учетом того, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, получим:

$$s = \sqrt{A^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha) + B^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha)} = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

или $s = C\cos(\omega_0 t + \alpha)$.

Как видим, точка совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и амплитудой $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Такие колебания называются *линейно поляризованными.*

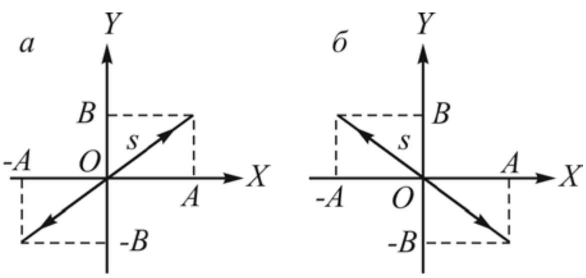

Рис. 25.1

2. Рассмотрим случай, когда разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$. Уравнение траектории будет:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = 0,$$

откуда $x = -yA/B$.

Это также уравнение прямой, расположенной, как показано на рис. 25.1, *б*. Вдоль этой прямой точка совершает гармонические колебания с той же амплитудой, что и в предыдущем случае.

3. Фазы слагаемых колебаний отличаются на $\pi/2$ или $3\pi/2$.

Уравнение траектории имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1.$$

Получили каноническую формулу уравнения эллипса (оси координат совпадают с осями эллипса).

В этом случае движение точки, которая участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях равной частоты с разными амплитудами и сдвигом фаз $\pi/2$ или $3\pi/2$, происходит по эллипсу с полуосями *A* и *B*, которые лежат на направлениях составляющих колебаний. Причем можно указать, что движение совершается по часовой стрелке, если $\alpha_2-\alpha_1=\pi/2$, и против нее, если $\alpha_2-\alpha_1=3\pi/2$ (рис. 25.2). Такие колебания называются *эллиптически поляризованными.*

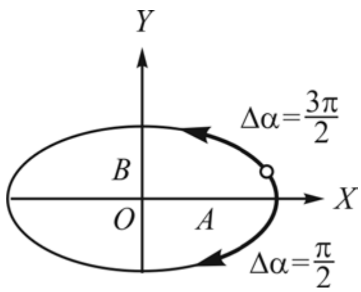

Рис. 25.2

Если отношение амплитуд изменяется, то эллипс деформируется, не изменяя своего положения относительно направлений слагаемых колебаний. Если изменяется сдвиг фаз, то эллипс одновременно и деформируется, и изменяет свою ориентацию относительно указанных направлений.

Очевидно, что при равенстве амплитуд составляющих колебаний эллипс превращается в окружность. Результирующее движение в этом случае называют *циркулярно поляризованным*. Таким образом, два взаимно перпендикулярных гармонических колебания:

$$x=A\cos\omega_0 t;\ \ y=A\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$x=A\cos\omega_0 t;\ \ y=-A\sin\omega_0 t$$

дают при сложении равномерное движение с угловой скоростью ω_0 по окружности, уравнение которой: $x^2 + y^2 = A^2$.

Это движение может происходить по или против часовой стрелки, что определяется сдвигом фаз.

И наоборот, любое равномерное движение, происходящее по окружности радиусом A с угловой скоростью ω_0, можно представить как суперпозицию двух взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движений.

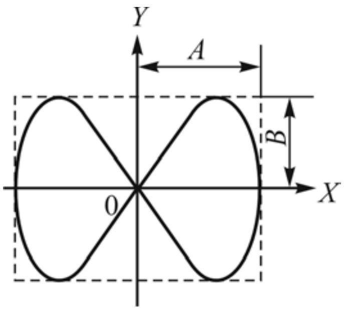

Рис. 25.3

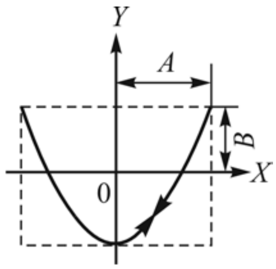

Рис. 25.4

Частоты слагаемых взаимно перпендикулярных колебаний могут отличаться. В этом случае траекториями колеблющейся точки, будут сложные кривые, называемые *фигурами Лиссажу.* Их форма зависит от соотношения частот и разности фаз слагаемых колебаний.

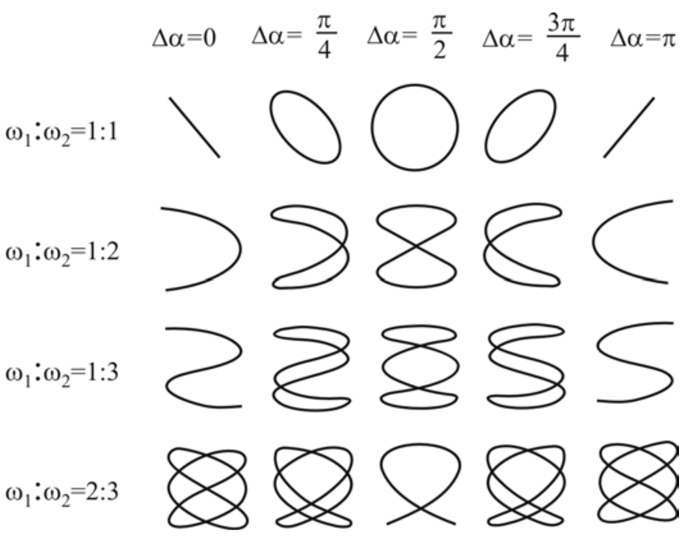

Рис. 25.5

Одна из простейших траекторий, которые получаются при отношении частот 1:2 и разности фаз $\pi/2$, изображена на рис. 25.3. Уравнения слагаемых колебаний в этом случае будут:

$$x = A\cos\omega_0 t\,,\;\; y = B\cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

При отношении 1:2 и разности фаз, равной нулю, траектория становится незамкнутой (рис. 25.4). По этой траектории точка совершает возвратно-поступательное движение.

По фигуре Лиссажу можно определить отношение частот слагаемых колебаний. Оно определяется отношением числа пересечений данной кривой с осями *X* и *Y*. Отметим, что чем сложнее кривая Лиссажу, тем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний.

На рис. 25.5 показаны фигуры Лиссажу для разных соотношений частот и сдвигов фаз.