Лекция 26 Уравнения движения колебательных систем с трением. Затухающие колебания. Коэффициент затухания, логарифмический декремент. Автоколебания.

Л-1: 9.7; 9.10; Л-2: с.339-344

Реально существующие колебательные системы являются диссипативными. В таких системах, кроме квазиупругих сил, действуют силы сопротивления, на преодоление которых постепенно расходуется энергия механических колебаний. В результате амплитуда уменьшается – колебания затухают. Строго говоря, такие колебания не являются гармоническими.

Однако, если колебания затухают достаточно медленно, то для них правомерно использовать понятия и амплитуды, и периода. Поскольку силы сопротивления мешают колебаниям, то амплитуда затухающих колебаний уменьшается, а их период, оставаясь постоянным, оказывается больше периода колебаний, совершаемых при отсутствии затухания. Закон уменьшения амплитуды затухающих колебаний зависит от характера сил сопротивления.

Наиболее распространен случай малых колебаний, при которых скорость тела обычно небольшая и сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости: $F_c = -r\upsilon$. (Знак «минус» указывает, что сила сопротивления противоположна скорости.)

Пусть система колеблется под действием квазиупругой возвращающей силы в среде, сопротивление которой линейно зависит от скорости. Затухающие колебания в этом случае будут описываться уравнением

$$ma = -kx - r\upsilon,$$

где r – *коэффициент сопротивления среды*.

Введем обозначения $\upsilon = \dot{x}$ и $a = \ddot{x}$ и перенесем все члены в левую часть уравнения

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0.$$

Разделив это уравнение на m и введя обозначения: $k/m = \omega_0^2$, $r/m = 2\delta$, получим

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Величину δ называют *показателем затухания*.

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которые зависят от параметров системы и коэффициента сопротивления r. Оно отличается от уравнения для свободных колебаний наличием члена с первой производной по x. С помощью подстановки $x = ze^{-\delta t}$ это уравнение, приведем к уравнению гармонических колебаний.

Сделаем замену переменных в уравнении, используя производные:

$$\dot{x} = e^{-\delta t}\dot{z} - \delta e^{-\delta t} z;$$

$$\ddot{x} = e^{-\delta t}\ddot{z} - 2\delta e^{-\delta t}\dot{z} + \delta^2 e^{-\delta t} z.$$

Подставив значения $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в уравнение и сократив все члены на множитель $e^{-\delta t}$, получим:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z - \delta^2 z = 0$$

или

$$\ddot{z} + \left(\omega_0^2 - \delta^2\right) z = 0.$$

Рассмотрим случай, когда сопротивление среды небольшое и выполняется условие: $\omega_0^2 > \delta^2$. Тогда $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$, что дает возможность ввести обозначение $\omega_0^2 - \delta^2 = \omega^2$. После этого уравнение примет вид $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$.

Как известно, решением этого уравнения является функция $z = A\cos\left(\omega t + \alpha_0\right)$, где A_0 и α_0 – постоянные, которые определяются из начальных условий.

Переходя к переменной x, получим

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos\left(\omega t + \alpha_0\right).$$

Таким образом, получили решение уравнения.

Из решения видно, что в результате совместного действия квазиупругих сил $F = -kx$ и сил сопротивления $F_c = -r\upsilon$ система совершает колебательное движение, амплитуда которого уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\delta t}.$$

Графически изменение амплитуды с течением времени выглядит как *огибающая кривая* затухающих колебаний (пунктир на рис. 26.1). Частота затухающих колебаний ω определяется свойствами колебательной системы и среды, в которой происходят колебания.

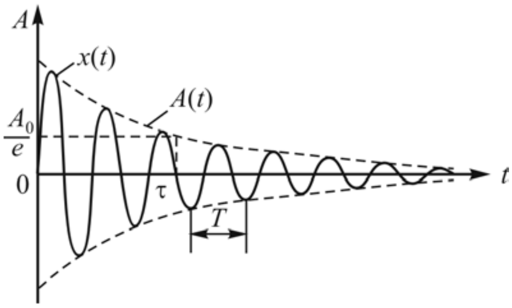

Рис. 26.1

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} > T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

немного больше периода колебаний T_0 той же системы при отсутствии затухания (свободных колебаний), что связано с некоторым замедлением движения, которое обусловливают силы сопротивления. Отметим, что при достаточно большом r движение не является периодическим.

Найдем отношение амплитуд, отстоящих друг от друга во времени на один период

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}.$$

Очевидно, что $e^{\delta T} = \text{const}$, т.е. отношение амплитуд затухающих колебаний, которые отстоят друг от друга на интервал времени, равный периоду, постоянно на протяжении всего времени колебаний.

Натуральный логарифм полученного отношения называют *логарифмическим декрементом затухания*

$$\theta = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \delta T.$$

Величину θ можно определить непосредственно из наблюдений, измерив амплитуды A_1 и A_2 двух последовательных колебаний: $\theta = \ln\left(A_1/A_2\right)$.

Зная θ и пользуясь соотношением $r/m = 2\delta$, можно определить коэффициент сопротивления

$$r = 2\delta m = 2\frac{\theta}{T}m.$$

Показатель затухания δ характеризует быстроту уменьшения амплитуды. Найдем время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз: $A_0/A_\tau = e^{\delta\tau} = e$, откуда $\delta\tau = 1$ или $\delta = 1/\tau$.

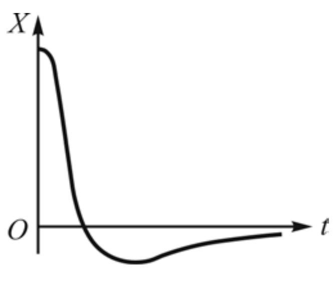

Рис. 26.2

Из последнего соотношения вытекает, что коэффициент затухания δ – физическая величина, обратная промежутку времени, по истечении которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз (см. рис. 26.2).

При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и значительное увеличение периода колебаний. При значениях δ, достаточно близких к ω_0, но меньших ее, движение тела теряет специфические черты колебательного движения, т.е. становится *апериодическим*. В этом случае колебательная система, выведенная из положения равновесия, медленно возвращается в исходное положение, не совершая колебаний.

Если при колебательном движении система, возвращаясь в состояние равновесия, имеет некоторый запас кинетической энергии, то в случае апериодического движения вся механическая энергия колеблющейся системы в момент ее возвращения в состояние равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления. График апериодического движения для некоторого показателя затухания представлен на рис. 26.2.

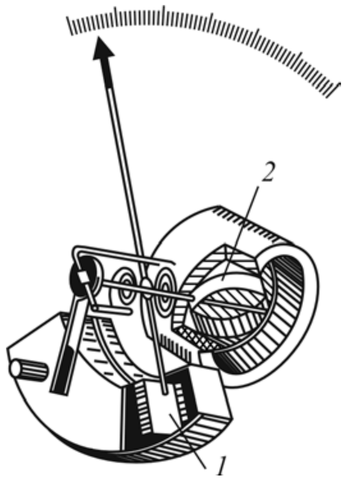

Рис. 26.3

Нередко в разных технических конструкциях возникает необходимость погасить возникшие колебания, т.е. создать условия, при которых искусственно увеличился бы расход энергии в системе. Например, в стрелочных измерительных приборах при резкой смене измеряемой величины возникают собственные колебания около нового положения равновесия. Если трение в приборе мало, то эти колебания затухают медленно и пришлось бы долго ждать, пока стрелка прибора установится в новом положении. Во избежание этого в измерительных приборах искусственно увеличивается затухание колебаний при помощи специальных приспособлений, называемых *демпферами* (механическими или электромагнитными). Простейшим является воздушный демпфер. Он состоит из легкого поршня *1*, соединенного с подвижной системой прибора *2* и двигающегося в ограниченном объеме без трения (рис. 26.3). Сопротивление воздуха при движении поршня делает колебания апериодическими. На таком же принципе основана работа автомобильного амортизатора, который представляет собой заполненный вязкой жидкостью цилиндр, где движется поршень с мелкими отверстиями.