Лекция 27 Вынужденные колебания. Резонанс. Добротность и ее связь с параметрами колебательной системы. Колебания связанных систем. Колебания в нелинейных системах. Релаксационные колебания.

Л-1: 9.8-9.11; Л-2: с.344-354

Если на колебательную систему действует периодически изменяющаяся внешняя сила, то система совершает колебания, характер которых в той или иной мере повторяет характер изменения этой силы. Такие колебания называются *вынужденными*.

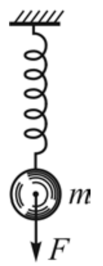

Рис. 27.1

Наиболее значительное отличие вынужденных колебаний от рассмотренных выше заключается в том, что частота этих колебаний в конечном итоге определяется не свойствами самой системы, а частотой внешнего воздействия. Рассмотрим простейшие вынужденные колебания, которые возбуждаются внешней силой, изменяющейся по гармоническому закону.

Пусть подвешенный на пружине груз массой m испытывает действие внешней силы F (рис. 27.1), которая изменяется по закону $F = F_0 \cos \omega t$, и силы сопротивления, пропорциональной скорости груза $F_c = -r\upsilon$.

В рассматриваемом случае сила изменяется во времени с периодом $T = 2\pi/\omega$, F_0 называется *амплитудой силы* и является наибольшим значением силы. Под действием силы F подвешенный груз будет постепенно раскачиваться. Амплитуда колебаний груза начнет возрастать. Благодаря работе, выполняемой внешней силой, увеличиваются максимальные значения, которых достигают потенциальная энергия пружины и кинетическая энергия груза. При этом будут возрастать потери на преодоление сил сопротивления. Наконец наступит момент, когда работа внешней силы станет точно компенсировать потери энергии в системе. Дальнейшее нарастание колебаний в системе прекратится, и установятся колебания с некоторой постоянной амплитудой. Этот процесс схематически изображен на

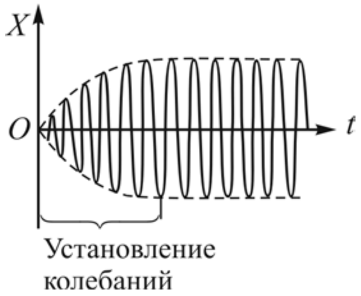

Рис. 27.2

рис. 27.2. Поскольку внешняя сила изменяется по гармоническому закону, то описываемые установившиеся колебания также будут гармоническими. Поэтому можно считать вынужденные колебания гармоническими, которые совершаются с частотой вынуждающей силы ω.

Уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t.$$

Разделив все члены этого уравнения на m и введя обозначения $k/m = \omega_0^2$, $r/m = 2\delta$, $f_0 = F_0/m$, получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t. \quad (*)$$

Предположим, что рассматриваемые вынужденные колебания происходят по закону

$$x = A\cos(\omega t + \alpha).$$

Чтобы определить амплитуду A и начальную фазу α вынужденных колебаний, подставим значение x и производные $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в уравнение (*). Поскольку x является решением уравнения (*), должны получить тождество:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) - 2\delta A\omega \sin(\omega t + \alpha) + \omega_0^2 A\cos(\omega t + \alpha) = f_0 \cos\omega t \cdot$$

После простых тригонометрических преобразований получим:

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A\cos\alpha - 2\delta A\omega \sin\alpha - f_0\right]\cos\omega t +$$

$$+\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) A\sin\alpha - 2\delta A\omega \cos\alpha\right]\sin\omega t = 0 \cdot$$

Для того чтобы последнее уравнение превратилось в тождество при любом t нужно, чтобы коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ были равны нулю

$$\left.\begin{aligned} &A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\alpha-2\delta A\omega\sin\alpha-f_0=0,\\ &A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\alpha+2\delta A\omega\cos\alpha=0. \end{aligned}\right\}$$

Из второго уравнения системы получим:

$$tg\alpha=-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

Возведя в квадрат и сложив оба уравнения полученной системы, получим

$$A^2\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2\right]=f_0^{\,2},$$

откуда

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}\ \text{или}\ A=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}.$$

Полученные выражения определяют фазу и амплитуду вынужденных колебаний, которые происходят по гармоническому закону. Из этих формул видно, что амплитуда A и фаза α зависят прежде всего от соотношения частоты ω_0 собственных колебаний и частоты ω вынуждающей силы.

Исследуем зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы при разных затуханиях.

1. Выясним прежде всего, как зависит амплитуда вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия ω, когда затухание колебаний отсутствует ($\delta=0$).

При $\omega<<\omega_0$ под корнем в последнем выражении играет роль только ω_0^2 и

$$A_0\approx\frac{f_0}{\omega_0^2}=\frac{F_0}{k}.$$

В этом случае амплитуда вынужденных колебаний оказывается равной статическому смещению груза, которое вызывается постоянной силой F_0. При приближении частоты вынуждающей силы ω к собственной частоте системы ω_0 выражение $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2$ уменьшается. Значит, амплитуда *А* резко возрастает и проходит через максимум при совпадении частот $\omega = \omega_0$. При дальнейшем возрастании ω снова начинает играть роль квадрат разности $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2$ и амплитуда колебаний начинает уменьшаться, причем $\lim\limits_{\omega\to\infty} A = 0$.

2. При наличии затухания амплитуда достигает максимума в том случае, если выражение под корнем в знаменателе будет иметь минимальное значение. Продифференцировав это выражение по ω и приравняв к нулю, получим условие, определяющее ω при максимальной амплитуде

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\delta^2\omega = 0.$$

Это уравнение имеет три решения: $\omega = 0$ и $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$. Первое решение соответствует максимуму знаменателя и нас не удовлетворяет. Из двух остальных решений отрицательное должно быть отброшено, потому что частота не может быть отрицательной.

Таким образом, искомая частота максимума амплитуды определяется соотношением

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Колебательная система особенно чувствительна к воздействию вынуждающей силы при этой частоте. Возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению $\omega_{рез}$ называется *резонансом*, а частота – *резонансной*.

Подставив значение $\omega_{рез}$, получим амплитуду при резонансе:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы изображена на рис. 27.3. Кривые на графике соответствуют различным значениям коэффициента затухания δ, а функции для разных

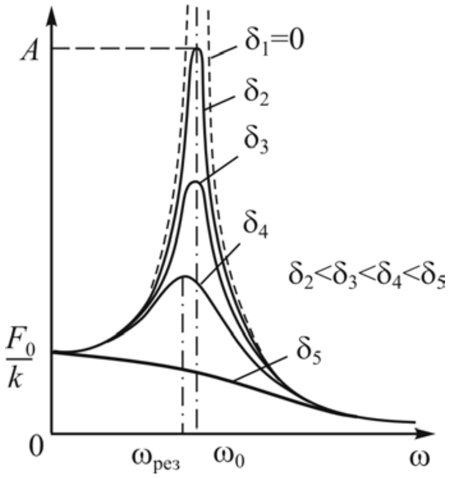

Рис. 27.3

δ называют *резонансными кривыми*. Следует отметить, что ярко выраженными резонансными свойствами, т.е. способностью особенно сильно отзываться на колебания определенной частоты, обладают только системы с малым затуханием.

Анализируя полученные формулы и резонансные кривые, приходим к выводу, что чем больше δ, тем ниже и левее максимум соответствующей кривой. При этом с возрастанием δ амплитуда колебаний вблизи резонанса изменяется медленнее, максимум получается менее острым. При значительном затухании ($2\delta^2 > \omega_0^2$) значение $\omega_{рез}$ становится мнимым. Это означает, что при данных условиях резонанс не возникает, с увеличением частоты амплитуда монотонно уменьшается (см. на рис. 27.3 нижнюю кривую, что соответствует затуханию δ_5).

Как видно из графиков, при стремлении ω к нулю все кривые приближаются к одному и тому же значению, равному $F_0/\left(m\omega_0^2\right)$ или F_0/k. Это значение соответствует смещению из состояния равновесия, которое получает система под действием постоянной силы, равной амплитуде F_0.

При стремлении циклической частоты к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, поскольку при большой частоте сила так часто изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из состояния равновесия.

Одной из основных характеристик колебательной системы является *добротность* Q, которая определяется отношением энергии, накопленной в колебательной системе, к энергии, которую расходует система за один период колебания. Добротность характеризует качество колебательной системы, потому что чем она больше, тем меньше потери энергии.

Добротность колебательной системы связана с логарифмическим декрементом затухания. При малых декрементах затухания $Q = \pi/\theta$.

В механической системе массой m, жесткостью k и коэффициентом сопротивления r добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\sqrt{mk}}{r} = \frac{\omega_0 m}{r}.$$

Резонанс очень часто наблюдается в природе и играет большую роль в технике. Большинство сооружений и машин способны совершать собственные колебания, поэтому периодические внешние воздействия могут вызвать их резонанс. Так, на коленчатый вал двигателя внутреннего сгорания со стороны шатуна действуют силы, период изменения которых связан с угловой скоростью вращения вала. Эти силы вызывают колебания вала и при скорости вращения, соответствующей резонансу, могут привести к поломке вала. Под воздействием не уравновешенных вращающихся частей машины может наступить резонанс фундамента сооружения или самой машины. Во всех случаях резонанс приводит к резкому увеличению амплитуды вынужденных колебаний всей конструкции и даже к разрушению сооружения. Для уменьшения резонанса параметры системы подбирают так, чтобы ее резонансные частоты были далеки от возможных частот внешнего воздействия, а также используют так называемые поглотители колебаний, или успокоители.

Вместе с тем явление резонанса часто бывает полезным. В радиотехнике резонанс позволяет выделить сигнал данной станции на фоне других сигналов станций, в акустике резонанс используется для анализа звуков и их усиления.

Все рассмотренные выше механические колебательные процессы происходят в линейных системах. *Линейными колебательными системами* называются такие, свойства которых не меняются при изменении их состояния. Параметры линейных колебательных систем (масса, жесткость пружины, сопротивление среды) не зависят от параметров состояния системы (смещений и скоростей).

Линейные колебательные системы обладают свойствами, значительно упрощающими анализ процессов, которые происходят в них, и поэтому часто используются для приближенного описания процессов, происходящих в реальных системах. Нужно отметить, что разные по физической природе процессы в линейных системах описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями.

В тех случаях, когда в пределах возможных изменений состояния реальной системы начинают проявляться изменения параметров, приходится учитывать нелинейность колебательной системы. Колебания таких систем описываются нелинейными уравнениями, а сами системы называются *нелинейными*.

Типичным примером нелинейных колебаний являются *автоколебания*. Автоколебаниями называют незатухающие колебания, которые могут существовать в какой-нибудь системе при отсутствии внешнего переменного воздействия. При этом амплитуда и период колебаний определяется свойствами самой системы. Этим автоколебания отличаются от вынужденных колебаний, параметры которых определяются характером внешнего воздействия. Примером механических автоколебаний могут быть колебания маятника часов, струны в смычковых или столба воздуха в духовых музыкальных инструментах.

В любой автоколебательной системе, независимо от ее строения, можно выделить три основные элемента: собственно колебательную систему, источник энергии и конструкцию, регулирующую поступление энергии из источника. В качестве классического примера автоколебательной системы рассмотрим механизм маятниковых часов, который получает энергию от гири, поднятой на высоту (рис. 27.4). Колесо *2* с зубцами в виде прямоугольных треугольников, которое называется храповым, закреплено на вращающемся при помощи гири валу. С зубцами этого колеса

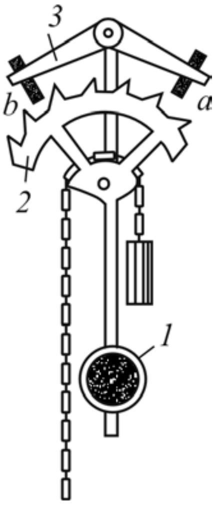

Рис. 27.4

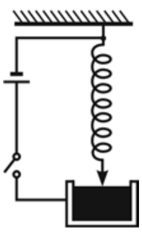

Рис. 27.5

сцеплены зубцы согнутого равноплечего рычага *3* (анкера), который жестко скреплен с маятником *1* и качается вместе с ним вокруг оси. При качании маятника зубцы анкера (то левый, то правый) попадают в промежуток между зубцами храпового колеса. Если в промежуток попадает левый зубец анкера, он «замыкает» храповое колесо. Анкер при этом поворачивается вместе с колеблющимся маятником, и зубец анкера выходит из промежутка, получая толчок от зубца храпового колеса. В это время ось храпового колеса под действием груза поворачивается и приводит через систему шестерен в движение стрелки часов. Теперь в выемку попадает правый зубец анкера и снова на некоторое время «замыкает» храповое колесо. С поворотом маятника зубец анкера выходит из выемки и получает еще раз толчок от зубца храпового колеса. Далее этот процесс повторяется.

Рассмотрим механические автоколебания, которые совершает нелинейная электромеханическая система под действием источника постоянной электродвижущей силы. Один конец пружины, по которой проходит электрический ток, закреплен, а второй опущен в сосуд с расплавленным сплавом Вуда (рис. 27.5). При замыкании электрической цепи витки притягиваются, пружина при этом сжимается и цепь разрывается. После разрыва цепи под действием силы тяжести и упругих свойств восстанавливается первоначальная длина пружины, цепь замыкается, и все повторяется опять.

Релаксационные колебания – это автоколебания, которые резко отличаются по форме от гармонических, поскольку в создающей их системе значительную роль играют диссипативные силы (например, силы внешнего или внутреннего трения). При релаксационных колебаниях энергия, накопленная каким-нибудь элементом колебательной системы, не переходит полностью к другим элементам (как в системах, которые совершают гармонические колебания), а рассеивается в системе, превращаясь в теплоту. Релаксационные автоколебательные системы характеризуются тем, что при отключении источника энергии колебательные движения в них невозможны.

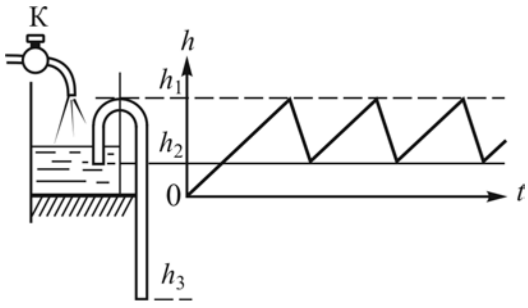

Рис. 27.6

Релаксационные колебания можно продемонстрировать при помощи гидравлического приспособления (рис. 27.6). Сосуд, в который вмонтирована согнутая трубка, с постоянной скоростью заполняется водой из крана *К*. Уровень наполнения сосуда растет с течением времени по линейному закону. Но как только уровень достигнет высоты верхнего загнутого края трубки h_1, срабатывает система сифона и уровень в сосуде падает до значения h_2, после чего сосуд снова начинает заполняться водой. Скорость опорожнения сосуда через сифон можно сделать значительно больше скорости его наполнения через кран, поскольку скорость воды в сифоне зависит от разности уровней h_2 и h_3. Далее процесс повторяется периодически. Зависимость уровня воды h от времени изображена на рис. 27.6, из которого видно, что колебания уровня воды не являются гармоническими.

Механические релаксационные колебания встречаются в разных механизмах (например, тормозные колодки). Трение в колодках достаточно большое, но оно уменьшается (во всяком случае, в некоторой области) при увеличении относительной скорости движения поверхностей, между которыми возникают силы трения.