Лекция 28 Волновое движение. Распространение колебаний в однородной упругой среде. Продольные и поперечные волны. Уравнение плоской гармонической бегущей волны. смещение, скорость и относительная деформация в бегущей волне. Энергия волнового движения. Поток энергии. Вектор Умова.

Л-1: 10.1-10.5; Л-2: с.371-373

Пусть колеблющееся тело находится в среде, все частицы которой связаны между собой. Соприкасающиеся с ним частицы среды придут в колебательное движение, в результате чего в прилегающих к этому телу участках среды возникают периодические деформации (например, сжатие и растяжение). При деформациях в среде появляются упругие силы, которые стремятся вернуть частицы среды в первоначальное состояние равновесия.

Таким образом, периодические деформации, которые появились в каком-нибудь месте упругой среды, будут распространяться с некоторой скоростью, зависящей от свойств среды. При этом частицы среды совершают колебательные движения около своих положений равновесия, от одних участков среды к другим передается только упругая деформация.

Процесс распространения колебательного движения в среде называется *волновым процессом* или просто *волной*. Иногда эту волну называют *упругой*, потому что она обусловлена упругими свойствами среды.

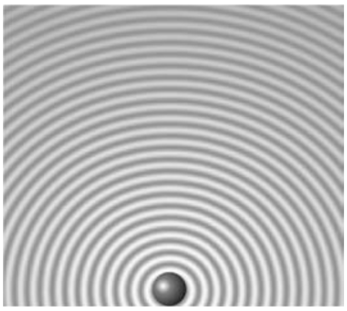

Рис. 28.1

Примером распространения волны являются хорошо известные всем волны, которые идут по поверхности жидкости. Волны, идущие по поверхности воды от брошенного камня, являются *круговыми*. Здесь «гребни» и «впадины» волны кругами распространяются по поверхности воды (рис. 28.1) с определенной скоростью υ, называемой *скоростью волны*.

Если внешняя сила, приложенная к элементарному объему неограниченной среды, изменяется по гармоническому закону, то вызванная ей волна называется *гармонической* или *синусоидальной*.

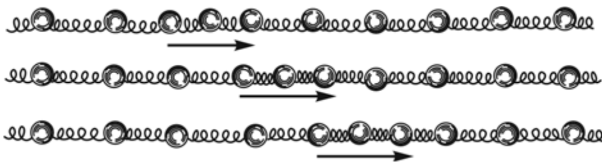

Рис. 28.2

Простейший вид волнового движения – это волны, которые распространяются в одном направлении. Моделью однородной упругой (одномерной) среды может служить система в виде бесконечной цепочки упруго связанных между собой одинаковых шариков (рис. 28.2). Импульс, переданный одному из шариков, будет распространяться вдоль цепочки с некоторой скоростью.

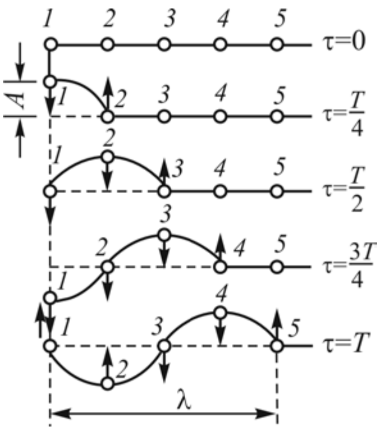

Рис. 28.3

Волны, в которых частицы совершают колебания вдоль направления распространения колебаний, называют *продольными*; если же частицы совершают колебания, перпендикулярные направлению распространения колебаний, волны называются *поперечными*. На рис. 28.3 изображена схема распространения поперечной волны. Показаны пять последовательных моментов образования волны, распространяющейся вдоль линии *1–5*.

Отметим, что графическое изображение волнового процесса имеет совершенно другой смысл, чем график смещения при гармоническом колебании, на котором изображается смещение одной и той же точки в зависимости от времени. На каждом ряду рис. 28.3 дается положение частиц среды в выбранный момент времени.

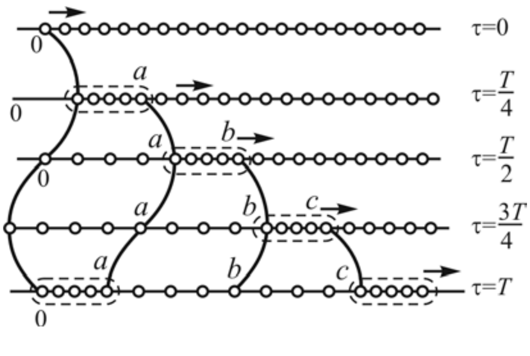

Рис. 28.4

На рис. 28.4 представлено аналогичное построение для продольной волны. Разница только в том, что смещения частиц происходят в направлении распространения колебаний. Как видно из рисунка, при продольной волне наблюдается сближение и удаление частиц друг от друга, в результате чего в среде возникают области сгущения частиц среды (отмечены на рисунке пунктиром) и разрежения; процесс распространения волны сопровождается перемещением мест сгущения и разрежения.

Какая из волн – продольная или поперечная – распространяется в данной среде, зависит от упругих свойств среды. Колебательное движение возможно только в направлении действия возвращающих сил. В газообразных и жидких средах силы упругости появляются при деформациях растяжения и сжатия. Эти деформации, распространяющиеся в жидкостях и газах, и представляют собой продольные волны. Следовательно, жидкости и газы – это среды, в которых механические волны могут быть только продольными.

В твердых телах, где кроме упругих деформаций растяжения и сжатия возможна упругая деформация сдвига, могут одновременно происходить и продольные и поперечные колебания, т. е. могут возникать как продольные, так и поперечные волны.

Распространяющаяся волна постепенно вовлекает в колебательное движение все новые и новые частицы среды. Геометрическое место точек, до которых в некоторый момент времени дошло колебание, называют *фронтом волны*. Геометрическое место точек, которые колеблются в одинаковых фазах, называют *волновой поверхностью*. Очевидно, что фронт волны является частным случаем волновой поверхности. В случае синусоидальных волн фронт – одна из волновых поверхностей. Направление, в котором распространяется волна, называется *лучом*.

Форма фронта волны определяет типы волн. Чаще всего встречаются волны, которые имеют *плоские, сферические* или *цилиндрические фронты*.

Чтобы описать волновое движение, нужно найти амплитуды и фазы колебательного движения в разных точках среды, а также изменение этих величин с течением времени.

Иначе говоря, необходимо найти закон изменения смещения χ для каждой точки среды как функцию времени.

Рассмотрим простейший случай распространения синусоидальной волны, в которой смещение частиц χ зависит только от одной координаты. Это означает, что если волна распространяется вдоль некоторой оси (например, *X*), то все точки среды, которые находятся в одной плоскости, перпендикулярной этой оси, имеют в данный момент одинаковые, происходящие по гармоническому закону, смещения от положения равновесия. Такая волна называется *плоской монохромати-ческой волной*. Смещение плоской волны является функцией времени и расстояния

$$\chi = f\left(t, r\right).$$

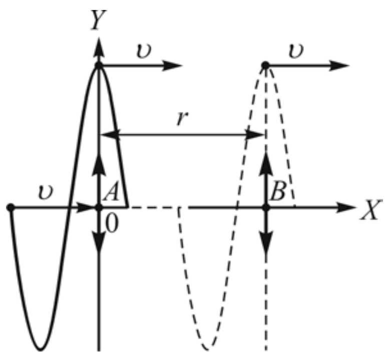

Рис. 28.5

Пусть колебательная система, которая совершает гармонические колебания, находится в начале координат *O* (рис. 28.5). Частицы среды, прилегающие к колебательной системе, приходят в колебания одновременно с колебаниями системы. Пусть колебания в точке *O* происходят по закону

$$\chi = A \sin \omega t,$$

где t – время, отсчитанное от момента начала колебаний.

Пусть скорость распространения возбуждения в среде υ. Колебания, распространяясь от колебательной системы, расположенной в плоскости, проходящей через точку *O*, дойдут до плоскости, проходящей через точку *B*, спустя интервал времени $\tau = x/\upsilon$.

Таким образом, частицы в точке *B* начнут колебаться на время τ позже, чем частицы в точке *O*. Допуская, что волны, распространяемые вдоль рассматриваемой прямой, не затухают, получим, что частицы среды в точке *B* начнут колебаться с амплитудой A и цикличной частотой ω по закону

$$\chi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{\upsilon} \right).$$

Это выражение дает смещение χ как функцию времени t и координаты *x* точки *B* относительно центра колебаний *O*.

Это уравнение представляет собой уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся в положительном направлении оси *X*. Уравнение волны, которая распространяется в противоположном направлении, имеет вид:

$$\chi = A\sin\omega\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right).$$

Длиной волны называется расстояние между ближайшими ее точками, которые колеблются в одинаковых фазах.

Периодом волны T называется время одного полного колебания ее точек. Величина, обратная периоду, называется *частотой волны* ν.

За период ($\tau = T$) волновой процесс распространяется на расстояние λ. Поэтому длина волны λ равна расстоянию, на которое распространяется волна за период T.

Скорость волны определяется скоростью распространения колебаний от одной точки среды к другой

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T}$$

или

$$\upsilon = \lambda\nu.$$

Под скоростью распространения волны понимается ее фазовая скорость, т.е. скорость распространения данной фазы колебаний.

Последнее уравнение часто называют *дисперсионным*. Оно справедливо для всех видов упругих синусоидальных волн независимо от их частоты.

Уравнение бегущей волны можно записать следующим образом:

$$\chi = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}x\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\upsilon T}x\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

Вводя обозначение $2\pi/\lambda = k$, получим

$$\chi = A\sin(\omega t - kx).$$

Величину $k = 2\pi/\lambda$ называют *волновым числом*. Это число показывает, сколько длин волн укладывается на отрезке длиной 2π метров.

Запишем уравнение волны

$$\chi = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = A\sin(\omega t - \alpha),$$

где $\alpha = \omega x/\upsilon = 2\pi x/\lambda$.

Величина α постоянна для данной точки и называется *начальной фазой колебаний* в этой точке.

Две точки, которые характеризуются координатами x_1 и x_2 от центра колебаний, имеют разность фаз

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda},$$

зависящую от взаимного расположения точек.

Из этой формулы видно, что две точки, которые находятся на расстоянии друг от друга, равном длине волны λ ($x_2 - x_1 = \lambda$), имеют разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi$. Эти точки для каждого данного момента времени t имеют одинаковые по величине и направлению смещения χ. А это означает, что точки колеблются в одинаковой фазе.

Если точки находятся на расстоянии $x_2 - x_1 = \lambda/2$ друг от друга, т.е. на расстоянии полуволны, то их разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$. Такие точки для каждого данного момента времени имеют смещения, одинаковые по величине, но разные по знаку. Говорят, что такие точки колеблются в противоположных фазах.

Любое тело в той или иной степени обладает упругостью, т.е. способностью восстанавливать свою форму, измененную в результате кратковременного действия силы. Эта способность является причиной того, что любое механическое воздействие передается телам с конечной скоростью. Скорость распространения механических колебаний зависит, прежде всего, от таких свойств среды, как плотность и упругость материала.

Рассмотрим длинный упругий стержень площадью сечения S. Пусть на крайнее сечение стержня подействовал короткий импульс силы, перпендикулярный сечению (например, удар молотком). Частицы среды, которые находятся в крайнем сечении, приобретают ускорение в направлении действия силы и смещаются. В соседнем слое при этом возникают упругие силы, которые стремятся восстановить первоначальный объем. Под действием этих сил частицы первого слоя останавливаются, но приобретают скорость частицы второго слоя. Это приводит к исчезновению деформации во втором слое и возникновению ее в третьем. Таким способом смещение частиц и деформация передаются от слоя к слою.

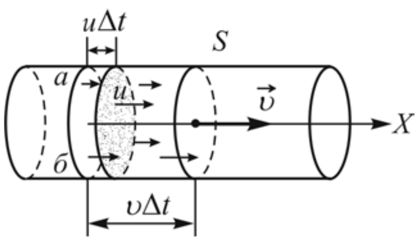

Рис. 28.6

Найдем скорость распространения импульса. Пусть в некоторый момент времени фронт волны, которая перемещается со скоростью υ, дошел до сечения *аб* (рис. 28.6). Все точки стержня, размещенные правее этого сечения, еще находятся в покое. В этот момент на сечение *аб* действует сила F, равная силе, с которой был нанесен удар (при условии, что силы внутреннего трения малы и ими можно пренебречь).

Через промежуток времени Δt фронт волны переместится в правую сторону на расстояние $\Delta x = \upsilon\Delta t$. В этом слое все частицы будут двигаться с одной и той же скоростью, и через промежуток времени Δt частицы стержня, которые находятся в момент t в плоскости *аб*, сместятся вдоль стержня на расстояние $u\Delta t$. При этом за время Δt через сечение *аб* перемещается масса $\Delta m = \rho S\upsilon\Delta t$. Импульс этой массы $\Delta m u = \rho S\upsilon u\Delta t$. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\rho S\upsilon u\Delta t = F\Delta t .$$

Силу F, действующую на перемещаемую массу, выразим через деформацию элемента стержня с помощью закона Гука

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}.$$

Длина l выделенного участка стержня $\upsilon\Delta t$, а изменение его длины под действием деформирующей силы F равно $u\Delta t$. Подставив значение l и Δl в последнюю формулу, найдем силу F

$$F = ES\frac{u}{\upsilon}.$$

Подставив это значение, найдем скорость распространения продольного импульса в стержне

$$\upsilon_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Таким образом, скорость продольных волн в упругом стержне зависит только от модуля Юнга E и плотности ρ.

Скорость продольных волн в жидкостях и газах определяется по формуле

$$\upsilon_{\parallel} = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho}},$$

где $\beta = 1/E$ – *коэффициент всестороннего сжатия* среды.

В поперечных волнах смещение частиц среды приводит к деформации сдвига. Поэтому скорость распространения поперечных волн

$$\upsilon_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad (10.9)$$

где G – модуль сдвига.

Поперечные волны могут распространяться только в твердых телах, поскольку для жидкостей и газов модуль сдвига равен нулю. Следует отметить, что скорость распространения продольных волн в твердых телах всегда больше скорости поперечных волн, поскольку для всех тел $E > G$.

В большинстве случаев скорость распространения механических волн определяется только свойствами среды и не зависит от параметров самой волны. В частности, скорость распространения волн в данной среде не зависит от их частоты. В таком случае говорят, что отсутствует *дисперсия волн*.

При распространении колебательного движения в упругой среде происходит передача энергии без переноса вещества. Передача энергии от колеблющегося тела к частицам окружающей среды называется *излучением*. В данном случае это волновая передача механической энергии. Энергия волны в упругой среде состоит из кинетической энергии совершающих колебания частиц вещества и потенциальной энергии упругой деформации среды.

Рассмотрим случай, когда плоская продольная волна, которая распространяется вдоль оси *X*, задана уравнением

$$\chi = A\sin\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right).$$

Выделим мысленно в среде такой элементарный объем ΔV, что во всех его точках скорость движения частиц и деформации среды можно считать неизменными и равными $d\chi/dt$ и $d\chi/dx$ соответственно.

Кинетическая энергия выделенного участка

$$\Delta E_к = \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 \Delta V = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\cos^2\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)\Delta V,$$

где скорость смещения частиц

$$u = \frac{d\chi}{dt} = A\omega\cos\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right).$$

Рассматриваемый участок среды имеет и потенциальную энергию $\Delta E_п$ упругой деформации, которая равна

$$\Delta E_п = \frac{1}{2}E\varepsilon^2\Delta V,$$

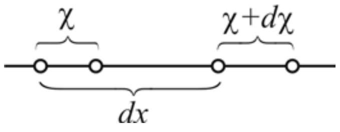

Рис. 28.7

где E – модуль Юнга, $\varepsilon = d\chi/dx$ – относительная деформация участка между сечениями, которые имеют разность смещений $d\chi$ частиц, находящихся на расстоянии dx друг от друга (рис. 28.7).

Относительная деформация между двумя бесконечно близкими частицами

$$\varepsilon = \frac{d\chi}{dx} = -\frac{A\omega}{\upsilon}\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

Подставив значение относительной деформации в предыдущую формулу, с учетом $E = \upsilon^2\rho$, получим выражение для потенциальной энергии выделенного участка

$$\Delta E_n = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\Delta V \cdot$$

Сравнивая выражения для ΔE_K и $\Delta E_П$, приходим к выводу, что и кинетическая, и потенциальная энергии изменяются в одинаковых фазах, т.е. одновременно достигается максимум и минимум. Этим энергия участка волны существенно отличается от энергии гармонических колебаний, где при максимуме кинетической энергии потенциальная энергия имеет минимум, и наоборот. Равенство мгновенных значений кинетической и потенциальной энергии – общее свойство бегущих волн.

При колебании отдельной точки полный запас энергии колебания остается постоянным. При колебании в среде каждый элемент объема среды связан с окружающей средой, и энергия от одного участка среды переходит в другие. Поэтому полная энергия участка среды, в котором распространяется волна, не остается постоянной.

Найдем полную энергию выделенного объема среды в данный момент:

$$\Delta E = \Delta E_к + \Delta E_п = \rho A^2\omega^2\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\Delta V \cdot$$

Таким образом, полная энергия участка волны пропорциональна квадрату амплитуды колебания, квадрату частоты и плотности среды. Она изменяется с течением времени пропорционально квадрату косинуса.

Введем плотность энергии w, которую определим как отношение энергии в элементарном объеме ΔV к этому объему:

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

Как видим, плотность энергии в данной точке также величина переменная. Поскольку среднее значение квадрата косинуса за период равно 1/2, то средняя плотность энергии

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2.$$

Отметим, что такая зависимость имеет место не только для плоской волны, но и для других видов синусоидальных волн.

При волновом процессе энергия не остается локализованной в данном участке, а перемещается в среде. Волна переносит энергию от источника колебаний к участку среды. Для характеристики этого процесса введем в рассмотрение понятие поток энергии. Поток энергии Φ через некоторую площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, представляет собой количество энергии, которая проходит в единицу времени через данную площадку. Количество энергии, которая переносится волной за одну секунду через площадку в один квадратный метр, размещенную перпендикулярно направлению распространения волн, называют *плотностью потока энергии* φ. Часто эту энергетическую характеристику называют *интенсивностью волны*. Получим формулу для нахождения этой величины.

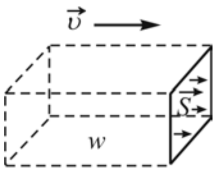

Рис. 28.8

Как видно из рис. 28.8, волна, проходя через площадку площадью в один квадратный метр, переносит за 1 с такое количество энергии, которое содержится в параллелепипеде: $\varphi = \langle w \rangle \upsilon$ или $\varphi = 1/2\left(\rho A^2 \omega^2 \upsilon\right)$. Поскольку скорость – векторная величина, то и плотность потока энергии можно рассматривать как вектор, направленный в сторону распространения волны:

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \vec{\upsilon}.$$

Этот вектор был впервые введен русским физиком Н.А. Умовым (1846–1915) в 1874 г. и называется *вектором Умова*.