

Лекция 29 Принцип Гюйгенса. Законы отражения и преломления волн. Дифракция. Интерференция волн. Стоячие волны. Уравнение стоячей волны. Кинетическая и потенциальная энергия стоячей волны.

Л-1: 10.6-10.9; Л-2: с.374-380

Голландский физик, математик и астроном Христиан Гюйгенс (1629–1695) предложил метод построения фронта волны в любой момент времени, если известен фронт волны в предыдущий момент времени и скорость распространения волн в данной среде.

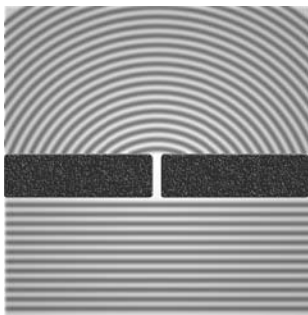


Рис. 29.1

Метод построения фронта волны основан на сформулированном Гюйгенсом принципе: каждая точка фронта волны является самостоятельным источником сферических вторичных волн, огибающая которых дает новое положение фронта волны. Идею метода подсказывает следующий опыт. Пусть на поверхности воды распространяется плоская волна, созданная пластиной, которая закреплена на электромагнитном вибраторе. Поставим на пути этой волны преграду с отверстием, размеры которого малы по сравнению с длиной волны λ (рис. 29.1). Волна, дошедшая до преграды, отразится от нее, а отверстие в преграде будет служить источником колебаний, которые распространяются по другую сторону преграды. За отверстием независимо от формы исходной волны будут распространяться полукольцевые волны. Этот опыт наводит на мысль, что каждая точка среды, до которой дошло колебание, является источником новых волн. В этом суть принципа Гюйгенса.

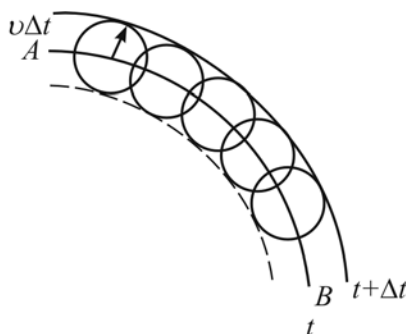


Рис. 29.2

Используем метод Гюйгенса при построении фронта волны. Пусть в момент времени t фронт волны с известным направлением движения занимает положение AB (рис. 29.2). Для построения нового фронта, который соответствует моменту $t + \Delta t$,

нужно каждую точку фронта AB принять за центр сферических волн, распространяющихся вперед, построить из каждой точки волновую поверхность радиусом $r = v\Delta t$ и провести огибающую всех элементарных поверхностей. Эта огибающая и будет фронтом волны в момент времени $t + \Delta t$.

Предложенный Гюйгенсом метод позволяет сделать вывод, что в однородной изотропной среде перемещающийся волновой фронт всегда остается геометрически подобным себе.

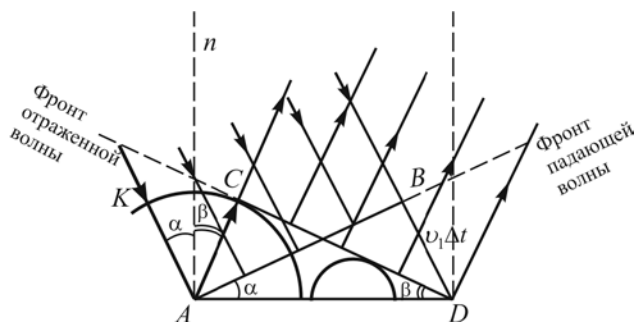


Рис. 29.3

Рассмотрим плоскую волну, которая падает на границу раздела AD двух сред (рис. 29.3). Обозначим скорости распространения волн в первой и второй средах v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$).

Положение волнового фронта в момент t показано линией AB . К моменту $t + \Delta t$ колебания, которые имеют направление BD , достигнут границы раздела. Но за это время уже образуются отраженные волны, показанные на рисунке. Их огибающая CD определит положение волнового фронта в момент времени $t + \Delta t$. Из равенства треугольников ABD и ACD получим:

$$\alpha = \beta,$$

т.е. *угол падения равен углу отражения*.

Из рисунка видно, что падающий луч KA (перпендикуляр, построенный в точке падения луча к границе раздела) и отраженный луч AC лежат в одной плоскости (*плоскости падения*). При этом углы падения и отражения располагаются по обе стороны от перпендикуляра n .

Одновременно с отражением имеет место и прохождение волны в другую среду. Линия AB (рис. 29.4) соответствует плоскому волновому фронту в момент времени t , а линия CD – волновому фронту в момент $t + \Delta t$. Из треугольников ABD и ADC получим:

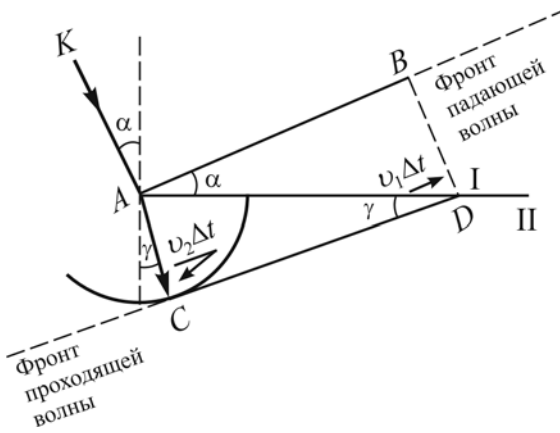


Рис. 29.4

$$\sin \alpha = \frac{v_1 \Delta t}{AD}; \quad \sin \gamma = \frac{v_2 \Delta t}{AD},$$

откуда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2}.$$

При этом падающий KA и преломленный AC лучи и перпендикуляр n , построенный из точки падения луча к поверхности раздела, лежат в плоскости падения.

Отношение, которое не зависит от угла падения, $v_1/v_2 = n_{21}$ называют *относительным показателем преломления*.

Явление *дифракции* заключается в том, что волны огибают преграды, которые встречаются на их пути, если размеры последних соизмеримы с длиной волны (рис. 29.5). Явление дифракции будет наблюдаться и в случае прохождения волн через отверстия, размеры которых малы по сравнению с длиной волны.



Рис. 29.5

Волновые поверхности за преградой возникают в соответствии с принципом Гюйгенса, поскольку каждая точка открытой части фронта волны, который является самостоятельным источником, излучает волны во всех на-

правлениях, в том числе и в область геометрической тени.

Однако принцип Гюйгенса ничего не говорит об амплитуде колебаний в волне за преградой. Ее можно найти, рассматривая сложение волн в области геометрической тени. Распределение амплитуд колебаний за преградой называют *дифракционной картиной*. Чем дальше от преграды, тем заметнее становится проникновение колебаний в область геометрической тени.

Вид дифракционной картины за преградой зависит от соотношений длины волны λ , размеров преграды d и расстояния L от преграды до точки наблюдения. Огибание имеет место только в случае, если преграда соизмерима с длиной волны. Тогда дифракция проявляется даже на очень малом

расстоянии L . Если же длина волны намного меньше размеров преграды, то дифракционную картину можно наблюдать только на большом расстоянии от преграды.

Если в среде одновременно распространяются несколько волн, то смещение частиц среды представляет собой векторную сумму смещений, которые наблюдались бы при распространении каждой волны по отдельности. Этот принцип независимости распространения волн носит название принципа суперпозиции для волнового движения. Суть данного принципа заключается в том, что каждая волна распространяется в среде независимо от наличия других волн; каждый волновой процесс происходит так, как будто всех остальных волн не существует. Этот экспериментальный факт был известен еще Леонардо Да Винчи.

Если колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой точке среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называются когерентными. Очевидно, что когерентными могут быть только волны, которые имеют одинаковую частоту.

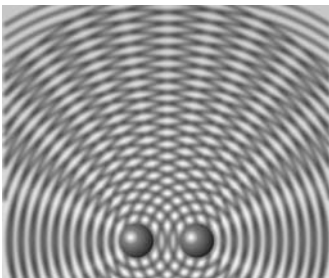


Рис. 29.6

При сложении когерентных волн возникает явление интерференции. Оно заключается в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других ослабляют друг друга. Вызываемая этими волнами картина колебаний является стационарной, т.е. в каждой точке происходят колебания с амплитудой, которая не зависит от времени. Понятно, что в разных точках амплитуды колебаний будут отличаться. На рис. 29.6 представлено изображение интерференции двух систем волн на поверхности воды от двух когерентных источников.

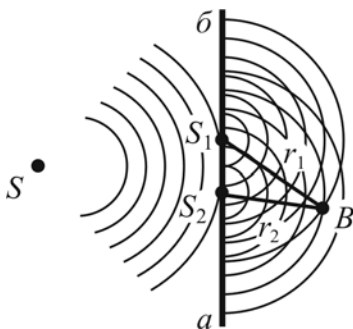


Рис. 29.7

Когерентные источники колебаний можно, например, осуществить следующим образом: поместим на краю ванны, заполненной водой, шарик на пружине и сообщим ему колебания. От шарика в жидкости будут распространяться

сферические волны. Поставим на пути волн преграду ab с двумя точечными отверстиями S_1 и S_2 , размещенными симметрично по отношению к источнику (рис. 29.7). В соответствии с принципом Гюйгенса отверстия S_1 и S_2 становятся самостоятельными источниками колебаний, которые колеблются с одинаковыми амплитудами и постоянной разностью фаз. С правой стороны от преграды ab будут распространяться две когерентные волны, и в каждой точке среды колебание возникает в результате сложения этих волн.

Рассмотрим за преградой точку B , которая находится от источников S_1 и S_2 на расстояниях r_1 и r_2 соответственно. Колебания будут доходить до точки B с некоторой разностью фаз, определяемой расстояниями r_1 и r_2 .

Уравнения этих колебаний будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= A_1 \cos \omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right), \\ \chi_2 &= A_2 \cos \omega \left(t - \frac{r_2}{v} \right). \end{aligned} \right\}$$

Введя в уравнения начальные фазы $\alpha_1 = -\omega r_1/v$ и $\alpha_2 = -\omega r_2/v$, получим:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \\ \chi_2 &= A_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Сложение колебаний, имеющих одинаковые направления, как было показано ранее, в точке B дает суммарное колебание

$$\chi = A \cos(\omega t + \alpha),$$

амплитуда которого

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \frac{2\pi d}{\lambda}},$$

где $d = r_2 - r_1$ — разность хода.

Амплитуда суммарного колебания зависит от разности фаз между интерферирующими волнами: $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi d/\lambda$. Результирующая амплитуда

достигает максимума при разности фаз $2\pi d/\lambda = 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, 3 \dots$, и разности хода: $d = 2n\lambda/2$.

Минимум суммарной амплитуды наблюдается при разности фаз $2\pi d/\lambda = (2n + 1)\pi$ и разности хода $d = (2n + 1)\lambda/2$.

В первом случае амплитуды колебаний складываются. Если $A_1 = A_2$, то результирующее колебание происходит с удвоенной амплитудой. Во втором случае $A = A_1 - A_2$ и при $A_1 = A_2$ колебания взаимно ликвидируются.

При промежуточных значениях разностей хода между $\pm 2n\pi$ и $\pm(2n + 1)\pi$, наблюдается некоторый средний эффект усиления или ослабления колебаний.

Практически важным случаем интерференции является суперпозиция двух встречных волн с одинаковыми частотами. Если плоская монохроматическая волна падает нормально на плоскую границу раздела двух сред, то в результате отражения от границы возникает также плоская волна, которая распространяется в обратном направлении. Аналогичное явление происходит при отражении волны, распространяющейся в струне и стержне, от закрепленного или свободного конца.

Пусть падающая и отраженная волна распространяются в среде с таким малым затуханием, что амплитуды их практически одинаковые. Направление распространения волн свяжем с направлением оси X . Начало координат возьмем в точке, где встречные волны имеют одинаковые фазы, а начало отсчета времени выберем так, что их начальные фазы равны нулю. Тогда уравнения плоских волн, которые распространяются в противоположных направлениях, будут иметь вид:

$$\chi_1 = A_0 \sin(\omega t - kx);$$

$$\chi_2 = A_0 \sin(\omega t + kx).$$

Сложив оба уравнения и преобразовав результат по формуле суммы синусов, получим

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 = 2A_0 \sin kx \cos \omega t .$$

Заменив волновое число k его значением $2\pi/\lambda$, выражению для χ можно придать следующий вид:

$$\chi = \left(2A_0 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \omega t .$$

Полученное уравнение и есть *уравнение стоячей волны*. Из него видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и во встречных волнах. Если зафиксировать некоторую точку, которая имеет координату x_1 , то для частицы, находящейся в этой точке, получим уравнение гармонического колебания с амплитудой

$$A = 2A_0 \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| .$$

Как видим, амплитуда стоячей волны зависит от координаты x . Знак модуля означает, что амплитуда – всегда положительна.

В точках, где $2\pi x/\lambda = \pm n\pi$ ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$), амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются *узлами*. Точки среды, которые находятся в узлах, колебаний не совершают. В эти точки падающая и отраженная волны приходят в противоположных фазах. Координаты узлов имеют следующие значения: $x_y = \pm n\lambda/2$. Расстояние между соседними узлами $x_{n+1} - x_n = \lambda/2$.

В точках, где $2\pi x/\lambda = \pm(2n+1)\pi/2$, амплитуда колебаний достигает максимального значения $2A_0$. Эти точки называют *пучностями* стоячей волны. В них падающая и отраженная волны приходят в одной фазе. Координаты пучностей $x_n = \pm(2n+1)\lambda/4$, а расстояние между двумя соседними пучностями также равно $\lambda/2$. Пучности и узлы смещены относительно друг друга на четверть длины волны: $x_y - x_n = \lambda/4$.

Таким образом, стоячая волна представляет периодическое во времени колебание с характерным пространственным распределением амплитуды –

чередованием узлов (нулей) и пучностей (максимумов). В линейных системах стоячая волна может быть представлена как сумма двух бегущих волн равной амплитуды, распространяющихся навстречу друг другу.

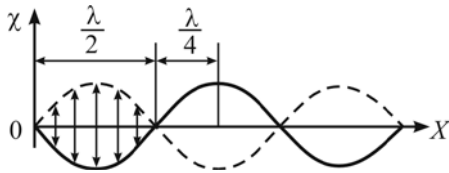


Рис. 29.8

На рис. 29.8 стоячая волна изображена графически. Если в среде распространяется поперечная волна, такое изображение дает действительную зависимость смещения χ частиц из состояния равновесия от координаты x в некоторый фиксированный момент времени; в случае продольной волны полученное изображение носит условный характер.

Допустим, в однородной изотропной среде установилась продольная стоячая волна, которая описывается уравнением

$$\chi = 2A_0 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t. (*)$$

Выделим мысленно в среде элементарный объем ΔV , настолько малый, чтобы в его пределах скорости колебательного движения частиц можно было считать одинаковыми, а деформацию однородной. Найдем кинетическую энергию выделенного объема

$$\Delta E_k = \frac{m}{2} \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2 \Delta V.$$

Продифференцировав (*) по времени и подставив в последнюю формулу, получим

$$\Delta E_k = 2\rho A_0^2 \omega^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \sin^2 \omega t \Delta V.$$

На основе этой формулы можно сделать вывод, что кинетическая энергия выделенного объема является периодической функцией. В волне существуют такие точки, в которых кинетическая энергия равна нулю в любой момент времени ($\sin^2(2\pi x/\lambda) = 0$). Эти точки называют *узлами кинетической энергии*. Точки, в которых энергия имеет наибольшее значение

$(\sin^2(2\pi x/\lambda)=1)$, называются *пучностями кинетической энергии*. Координаты пучностей ΔE_k совпадают с координатами пучностей смещения стоячей волны, а координаты узлов ΔE_k совпадают с координатами узлов смещения стоячей волны.

Потенциальная энергия выделенного объема

$$\Delta E_n = \frac{E\varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 \Delta V.$$

Скорость звука в газах меньше, чем в жидкостях, а в жидкостях меньше, чем в твердых телах

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{4\pi A_0}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t$$

и учитывая, что $E = \nu^2 \rho$, $\nu = \lambda \nu$, а $2\pi \nu = \omega$, получим конечную формулу для потенциальной энергии выделенного объема

$$\Delta E_n = 2\rho A_0^2 \omega^2 \cos^2 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos^2 \omega t \Delta V.$$

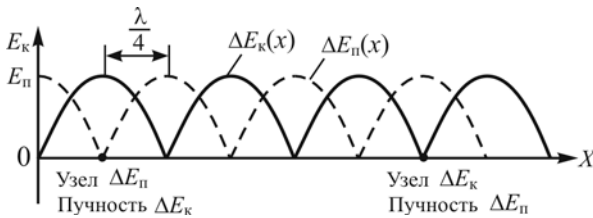


Рис. 29.9

Отсюда видно, что потенциальная энергия также является периодической функцией с тем же периодом, что и кинетическая энергия.

Графики распределения амплитуд кинетической энергии ΔE_k и потенциальной

энергии ΔE_n в стоячей волне для некоторого фиксированного момента времени представлены на рис. 29.9. Из него видно, что пучности кинетической и потенциальной энергии смещены в пространстве на четверть длины волны ($\lambda/4$).

В бегущей волне происходит перенос энергии, а в стоячей волне через плоскости, в которых размещены узлы волны, энергия не течет. Таким образом, в стоячей волне энергия может перемещаться только в пределах участков между двумя соседними узлами деформаций и узлом скоростей.