Лекция №3 Криволинейное движение. Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения. Движение точки по окружности. Угловое перемещение, векторы угловой скорости и углового ускорения. Связь между векторами линейных и угловых величин.

Л-1: 1.3, 1.5; Л-2: с.22-41

В общем случае криволинейного движения вектор скорости может изменяться как по величине, так и по направлению. Рассмотрим характер этих изменений.

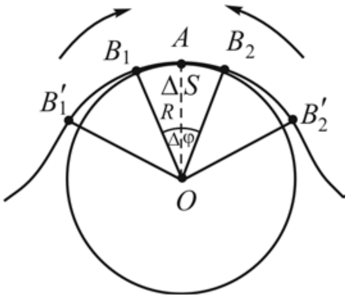

Рис. 3.1

Из математики известно, что любую плавную кривую можно представить состоящей из дуг окружностей. Действительно, если точки B_1 и B_2 на кривой (рис. 3.1) выбраны достаточно близко, то участок B_1B_2 этой кривой будет близок к некоторой дуге соприкасающейся окружности.

Длина дуги Δs связана с углом $\Delta\varphi$ соотношением $\Delta s = R\cdot\Delta\varphi$, где $R = OA$ – радиус кривизны окружности. При бесконечном уменьшении угла кривая $B_1^{'}AB_2^{'}$ совпадет с дугой соприкасающейся окружности, откуда радиус кривизны кривой в данной точке

$$R = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Кривизной плоской кривой в данной точке называется величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности, которая проходит через эту точку и две соседние с ней при их бесконечном сближении

$$\rho = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Пусть материальная точка, имевшая в положении *А скорость* $\vec{\upsilon}$ и радиус-вектор $\vec{r}$, за небольшой интервал времени Δt совершила перемещение $\Delta\vec{r}$ и оказалась в точке *В*, положение которой определяется радиусом-вектором $\vec{r}_1$ (рис. 3.2). При этом ее скорость изменилась как по величине, так

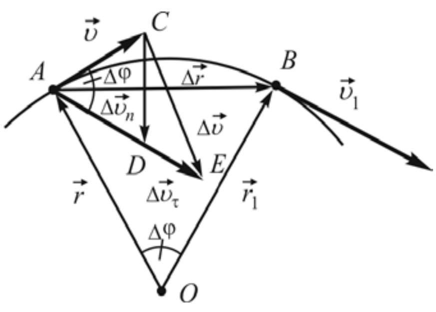

Рис. 3.2

и по направлению, и определяется вектором $\vec{\upsilon}_1$. Перенесем этот вектор в точку *A* (отрезок *AE*) и построим вектор $\Delta\vec{\upsilon}$, равный изменению вектора скорости $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}$ (вектор $\overrightarrow{CE}$). Как уже отмечалось, среднее ускорение $\langle\vec{a}\rangle = \Delta\vec{\upsilon} / \Delta t$ характеризует изменение вектора скорости за некоторый интервал времени Δt. Рассмотрим отдельно изменения модуля и направления вектора $\vec{\upsilon}$.

На отрезке *AE* отложим отрезок *AD*, численно равный модулю вектора $\vec{\upsilon}$, и соединим прямой точку *C* с точкой *D*. Приращение вектора скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ может быть представлено в виде суммы двух векторов: $\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_\nu$. Вектор $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ численно характеризует изменение модуля вектора скорости за время Δt

$$\left|\Delta\vec{\upsilon}_\tau\right| = \upsilon_1 - \upsilon = \Delta\upsilon .$$

При бесконечном уменьшении Δt модуль соответствующего ускорения определяется формулой

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot$$

Это ускорение называется *тангенциальным* или *касательным* и направлено, как и скорость, по касательной к траектории.

Изменение направления вектора скорости за время Δt характеризуется углом поворота $\Delta\varphi$, которому соответствует отрезок *CD* перемещения конца вектора $\vec{\upsilon}$ при повороте ($\Delta\upsilon_n = CD$). Заметим, что радиус-вектор $\vec{r}$ также поворачивается на угол $\Delta\varphi$, которому соответствует перемещение $\Delta\vec{r}$.

Для определения быстроты изменения направления скорости $a_n = \Delta\upsilon_n / \Delta t$ будем бесконечно уменьшать интервалы времени Δt. При этом точки *A* и *B* траектории и векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}_1$ станут сближаться и будут лежать практически в одной плоскости, называемой соприкасающейся плоскостью с кривой. Для упрощения вывода ограничимся случаем плоского движения, при котором все точки траектории лежат в одной плоскости на дуге круга с радиусом кривизны r. В пределе при $\Delta\varphi \to 0$ углы при основании равнобедренного треугольника *ACD* будут стремиться к 90° и следовательно, вектор $\vec{a}_n$ будет направлен по нормали к вектору скорости $\vec{\upsilon}$, т.е. по радиусу к центру кривизны *O*. Поэтому ускорение $a_n = d\upsilon_n / dt$ называется *нормальным* или *центростремительным*.

Треугольники *ACD* и *OAB* подобны, поэтому из пропорциональности сторон имеем: $CD / AC = AB / OA$ или $\left|\Delta\upsilon_n\right| / \upsilon = \left|\Delta\vec{r}\right| / r$. Отсюда $\left|\Delta\upsilon_n\right| / \upsilon \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| / r$. Разделим обе части последнего равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, в результате получим величину нормального ускорения

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{\upsilon}_n\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon}{r} \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{r}.$$

Можно показать, что формула $a_n = \upsilon^2 / r$ остается справедливой и в случае любой пространственной кривой.

При прямолинейном движении вектор скорости направлен вдоль траектории и может изменяться только по величине (в этом случае нормальное ускорение $a_n = 0$). При движении по окружности радиусом R с постоянной по величине скоростью υ тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$, а нормальное $a_n = \upsilon^2 / R = \mathrm{const}$ и направлено по радиусу. Оно прямо пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально радиусу траектории.

В общем случае вектор полного ускорения $\vec{a}$ слагается из векторов тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений и направлен под углом к касательной в данной точке траектории: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Этот угол острый ($\alpha < \pi/2$), если модуль скорости растет (рис. 3.3, *а*), тупой ($\alpha > \pi/2$), если модуль

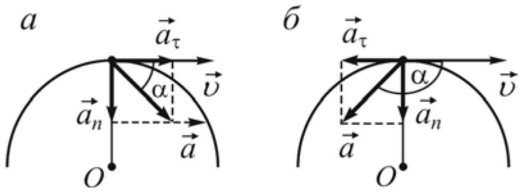

Рис. 3.3

уменьшается (рис. 3.3, *б*), и $\alpha = \pi/2$ при неизменном модуле скорости. Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{r}\right)^2}.$$

Наиболее простым и часто встречающимся в технике и повседневной жизни является случай криволинейного движения, называемого *вращательным движением.*

Движение точки по окружности удобно описывать не линейными величинами $\Delta\vec{r}$, s, $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}$, а угловыми: углом поворота φ, угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.

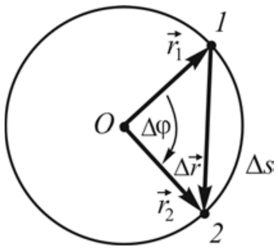

Рис. 3.4

Пусть точка, двигаясь по окружности, за время Δt переместилась из положения *1* в *2* (рис. 3.4). При этом радиус-вектор, определяющий ее положение, не изменился по величине ($r = \text{const}$), а только повернулся на угол $\Delta\varphi$.

Мы полностью решим задачу о движении точки по окружности, если найдем зависимость угла поворота от времени $\varphi(t)$.

Рассмотрим сначала равномерное вращение, при котором за любые равные интервалы времени углы поворота одинаковые. Какие бы при этом мы ни брали интервалы Δt, отношение соответствующего угла поворота ко времени $\Delta\varphi/\Delta t$ будет постоянным и его можно использовать для характеристики скорости движения.

Угловая скорость равномерного вращения равна отношению угла поворота $\Delta\varphi$ ко времени Δt, за которое этот поворот совершается,

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Единица измерения угловой скорости – 1 рад/с.

Если за время Δt точка совершает N полных оборотов, то угол

$$\Delta\varphi = 2\pi N,$$

а угловая скорость

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где $T = \Delta t / N = 1/\nu$ – период обращения, $\nu = N/\Delta t$ – частота вращения.

Зная угловую скорость и время, можно определить угол поворота за любой интервал времени $\Delta t = t - t_0$: $\varphi - \varphi_0 = \omega(t - t_0)$, откуда

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 – начальный угол в момент времени $t_0 = 0$.

В случае неравномерного вращения различают среднюю и мгновенную угловые скорости.

Средняя угловая скорость равна отношению угла поворота к интервалу времени, за который этот поворот произошел

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Мгновенная угловая скорость характеризует вращение в данный момент времени и равна пределу отношения или производной угла поворота по времени

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловая скорость, как и линейная υ, характеризуется не только величиной (численным значением), но и направлением. В самом деле, даже в одной плоскости вращение может происходить по ходу или против хода часовой стрелки; кроме этого, плоскость вращения сама может изменять свое положение.

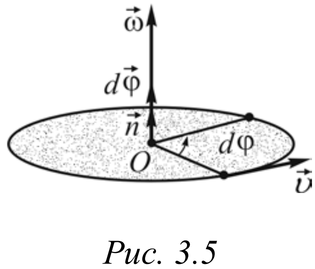

Рис. 3.5

Введем вектор бесконечно малого угла $d\vec{\varphi}$, который численно равен углу поворота радиуса-вектора $d\varphi$ и направлен вдоль единичного вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости таким образом, что если смотреть с вершины вектора $\vec{n}$, то поворот будет происходить против часовой стрелки (рис. 3.5): $d\vec{\varphi} = \vec{n} \cdot d\varphi$, где модуль $|\vec{n}| = 1$. Тогда вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n},$$

а его направление совпадает с нормалью к плоскости вращения.

Установим связь между векторами угловой $\vec{\omega}$ и линейной $\vec{\upsilon}$ скоростей.

Учитывая, что радианной мерой угла является отношение соответствующей дуги ds к радиусу $d\varphi = ds/r$, а линейная скорость точки при движении по окружности численно равна $\upsilon = ds/dt$, получаем связь между величинами линейной и угловой скоростей: $\upsilon = \omega \cdot r$, то есть модуль скорости $\vec{\upsilon}$ численно равен площади прямоугольника, сторонами которого являются векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$.

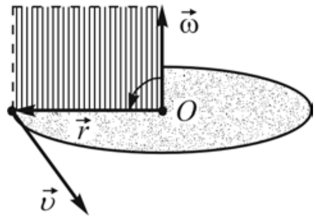

Рис. 3.6

Кратчайший поворот от $\vec{\omega}$ к $\vec{r}$ будет происходить против часовой стрелки, если смотреть с вершины вектора $\vec{\upsilon}$ (рис. 3.6). Таким образом, вектор линейной скорости $\vec{\upsilon}$ равен векторному произведению угловой скорости и радиуса-вектора точки, в которой определяется $\vec{\upsilon}$

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Для определения направления векторов угловых величин удобно пользоваться *правилом правого винта (буравчика)*: если поворачивать головку винта в направлении вращательного движения точки, то его поступательное движение покажет направление вектора угловой скорости (рис. 3.7).

В отличие от свободных векторов, которые могут иметь произвольные точки приложения и направления в пространстве (например, $\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}$, …), векторы угловых величин $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$, … являются *аксиальными*, т.е. они всегда направлены вдоль оси вращения (перпендикулярно плоскости вращения).

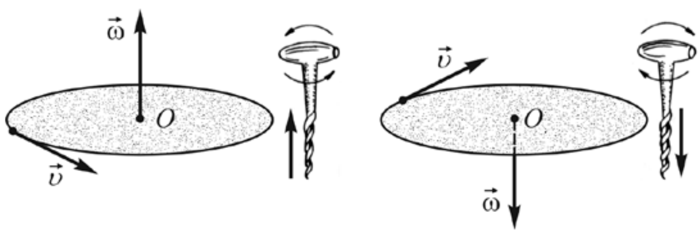

Рис. 3.7

Характеристикой изменения угловой скорости является угловое ускорение. Различают среднее и мгновенное угловые ускорения.

Среднее угловое ускорение за некоторый интервал времени $\langle\vec{\varepsilon}\rangle$ равно отношению изменения угловой скорости ко времени, за которое произошло это изменение:

$$\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Мгновенное угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости в данный момент времени и равно пределу этого отношения, или производной угловой скорости по времени, или второй производной угла по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Единица измерения углового ускорения – 1 рад/с^2.

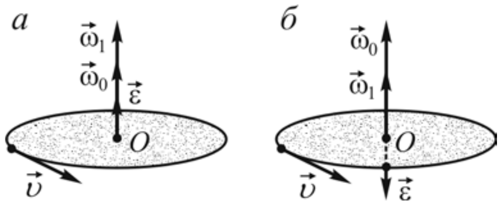

Рис. 3.8

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с вектором изменения угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$: в случае ускоренного движения по окружности совпадает с направлением $\vec{\omega}$ (рис. 3.8, *а*) и противоположно ему в случае замедленного движения (рис. 3.8, *б*). Отметим, что вектор угловой скорости всегда совпадает по направлению с вектором угла поворота.

Подставляя в формулу определения модуля углового ускорения $\varepsilon = d\omega / dt$ выражение $\omega = \upsilon / r$ и учитывая, что тангенциальное ускорение $a_\tau = d\upsilon / dt$, получаем связь углового и тангенциального ускорений

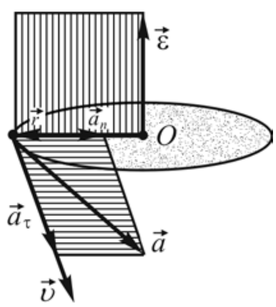

Рис. 3.9

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}.$$

Из этой формулы и рис. 3.9 видно, что вектор $\vec{a}_\tau$ равен векторному произведению углового ускорения и радиуса-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}].$$

Нормальное ускорение численно равно $a_n = \upsilon^2/r = \omega^2 r$ и направлено к центру кривизны противоположно $\vec{r}$, поэтому

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}.$$

Вектор полного ускорения точки

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right] - \omega^2 \vec{r}.$$

Чтобы найти зависимость угла поворота от времени $\varphi(t)$ для равноускоренного вращательного движения, найдем сначала зависимость угловой скорости от времени $\omega(t)$. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальный угол равен φ_0, а начальная угловая скорость ω_0. Из формулы определения углового ускорения бесконечно малое приращение угловой скорости $d\omega = \varepsilon dt$. Интегрируя по времени

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int\limits_0^t \varepsilon\, dt,$$

получаем линейную зависимость $\varepsilon(t)$

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Из формулы определения угловой скорости выразим приращение угла поворота $d\varphi = \omega dt$. Подставим в это соотношение полученное в соответствии с формулой значение ω и еще раз проинтегрируем по времени

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int\limits_0^t \omega_0\, dt + \int\limits_0^t \varepsilon t\, dt,$$

В случае, когда $\varepsilon = \mathrm{const}$, получим следующую квадратичную зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Исключив из последних двух уравнений время, получим еще одно соотношение, которое связывает между собой кинематические характеристики вращательного движения

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$