Лекция №7 Динамика механических систем. Внешние и внутренние силы. Движение системы материальных точек. Центр масс и центр тяжести механической системы. Движение центра масс. Закон сохранения импульса замкнутой механической системы.

Л-1: 3.1-3.4; Л-2: с. 113-130

На практике нередко приходится изучать движение сразу нескольких взаимодействующих тел. Совокупность таких тел называют *механической системой*. Примером механической системы может быть любой механизм: тепловоз с вагонами, Солнце с планетами, а также любое тело, если его рассматривать как совокупность отдельных частиц. Если в условиях рассматриваемой задачи формой, размерами и внутренней структурой тел, входящих в механическую систему, можно пренебречь, то их рассматривают как *систему материальных точек*.

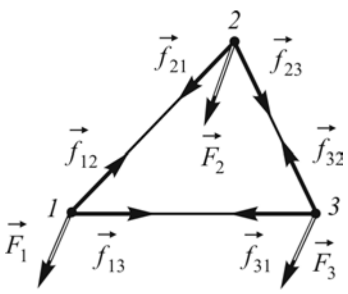

Рис. 7.1.

В классической механике масса является *аддитивной величиной*: суммарная масса механической системы равна сумме масс входящих в систему тел (материальных точек) $m = \sum m_i$. Силы, действующие между телами (материальными точками), которые составляют данную систему, называют *внутренними*. Будем обозначать их $\vec{f}_{ij}$. Условимся, что в дальнейшем первый индекс будет обозначать тело (точку), на которое действует сила, а второй – со стороны которого она действует (рис. 7.1). Силы, действующие на тела системы со стороны других тел, которые не входят в систему, называются *внешними*. Будем обозначать их $\vec{F}_i$.

В зависимости от постановки задачи одни и те же силы могут выступать в роли как внешних, так и внутренних.

Система называется *замкнутой (изолированной)*, если составляющие ее тела движутся только под действием внутренних сил. При этом внешние силы отсутствуют.

Под действием сил каждая из точек системы изменяет свою скорость и положение относительно других точек. Для описания движения каждой точки можно использовать законы Ньютона. Однако, особенно если система состоит из большого количества точек, это описание весьма громоздкое и не учитывает поведения системы в целом. Движение системы как целого удобно рассматривать, используя понятие центра масс (центра инерции).

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек массами m_i. Импульс системы $\vec{p}$ равен векторной сумме импульсов всех точек, образующих систему

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i \cdot$$

Введем понятие центра масс: *центром масс* системы материальных точек называется такая точка, радиус-вектор которой $\vec{r}_c$ равен отношению суммы произведений масс всех точек и их радиусов-векторов $\vec{r}_i$ к суммарной массе системы

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i},$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-й точки.

Тогда импульс механической системы равен

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} m \vec{r}_c,$$

где масса системы $m = \sum_{i}^{n} m_i$.

Считая массу системы неизменной, получим

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} m \vec{r}_c = m \frac{d\vec{r}_c}{dt} = m \cdot \vec{\upsilon}_c,$$

то есть импульс механической системы равен импульсу точки, которая находится в центре масс системы и имеет массу, равную массе системы.

Положение центра масс характеризует распределение масс тел, входящих в механическую систему. Если начало координат поместить в центр масс ($\vec{r}_c = 0$), то сумма произведений масс всех точек и их радиусов-векторов относительно центра масс равна нулю

$$\sum m_i \vec{r}_i = 0 \cdot$$

Центр масс тела чаще всего совпадает с одной из его частиц, но он может находиться и вне тела (например, кольцо, сфера). Центры масс однородных симметричных тел находятся в их центре или на оси симметрии.

Координаты центра масс системы материальных точек равны отношениям сумм произведений координат всех точек и их масс к суммарной массе системы

$$x_c = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i}, \; y_c = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{\sum\limits_i m_i}, \; z_c = \frac{\sum\limits_i m_i z_i}{\sum\limits_i m_i}.$$

Заметим, что в элементарной физике вводится понятие центра тяжести тела. *Центром тяжести* называют точку приложения результирующей всех сил тяжести, действующих на каждый элемент тела. Положение центра тяжести определяют из условия равновесия: тело будет находиться в равновесии относительно любой горизонтальной оси, которая проходит через его центр тяжести. В однородном поле тяготения положение центра тяжести тела совпадает с его центром масс. Понятие центра масс не связано ни с каким силовым полем и имеет смысл для любой механической системы.

Рассмотрим систему, состоящую из n тел массами m_i. Входящие в систему тела могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. Другими словами, на тела системы могут действовать как внутренние $\vec{f}_{ij}$, так и внешние $\vec{F}_i$ силы.

Запишем уравнения, выражающие второй закон Ньютона, для каждого из тел системы:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1n} + \vec{F}_1;$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2;$$

……………………………….

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{f}_{n1} + \vec{f}_{n2} + \ldots + \vec{f}_{n,n-1} + \vec{F}_n.$$

Просуммируем уравнения для всех тел системы. В соответствии с третьим законом Ньютона сумма всех внутренних сил равна нулю ($\sum_{i-1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\vec{f}_{ij} = 0$, так как все эти силы попарно равны по величине и противоположно направлены), поэтому будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

Обозначив результирующую всех внешних сил $\vec{F} = \sum_{i-1}^{n}\vec{F}_i$, получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,.$$

Полученное соотношение является одной из наиболее общих формулировок второго закона динамики для системы материальных точек: скорость изменения импульса системы материальных точек равна равнодействующей внешних сил, которые действуют на систему.

Из последнего выражения можно получить и другую общую формулировку

$$d\vec{p} = \vec{F}dt\,.$$

Изменение импульса системы равно импульсу равнодействующей внешних сил.

Дифференцируя по времени выражение для импульса системы и сравнивая полученный результат с формулой $d\vec{p}\,/\,dt = \vec{F}$, получим *закон движения центра масс механической системы*:

$$\frac{d\left(m\vec{\upsilon}_c\right)}{dt} = \vec{F}\,,$$

или

$$d\left(m\vec{\upsilon}_c\right)=\vec{F}dt.$$

Центр масс механической системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей всех внешних сил (которые приложены к телам, составляющим систему). Это утверждение иногда называют *теоремой о движении центра масс механической системы*.

Если результирующая внешних сил $\vec{F}=0$, то изменение импульса замкнутой механической системы равно нулю: $\vec{d}p=0$. Таким образом, мы пришли к выводу, что импульс замкнутой механической системы остается постоянным при любых взаимодействиях, происходящих внутри системы

$$\vec{p}=\sum_i p_i=\mathrm{const}\,.$$

Полученное соотношение представляет собой аналитическую форму закона сохранения импульса механической системы. Из него следует, что центр масс замкнутой механической системы находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно

$$m\vec{\upsilon}_c=\overrightarrow{\mathrm{const}}\,.$$

Таким образом, на движение центра масс механической системы оказывают влияние только внешние силы. Какие бы движения частей системы под действием внутренних сил не происходили, ее центр масс в инерциальной системе отсчета сохранит свое первоначальное состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Закон сохранения импульса для замкнутой механической системы является одним из фундаментальных законов природы, справедливых как для макроскопических тел, так и для микромира.

Применение закона сохранения импульса позволяет упростить решение многих задач, поскольку из рассмотрения могут быть исключены все внутренние силы, которые обычно неизвестны.