Лекция №8 Движение тела переменной массы. Уравнения Мещерского и Циолковского. Работа силы, мощность, энергия. Консервативные и неконсервативные силы и системы. Кинетическая и потенциальная энергия.

Л-1: 4.1-4.3; Л-2: с.131-150

В природе и технике нередки случаи, когда масса тел изменяется с течением времени за счет потери или приобретения вещества. Так, масса метеорита при полете в атмосфере уменьшается в результате отрыва или сгорания его частиц; масса дождевой капли растет при падении в перенасыщенном водяным паром воздухе; масса дрейфующей льдины увеличивается при намерзании и уменьшается при таянии; масса машины для поливки улиц уменьшается при вытекании водяных струй; масса ракеты уменьшается в результате вытекания газов, которые образуются при сгорании топлива, и т.д. Во всех этих случаях имеют дело с движением тел переменной массы. Уравнения движения тел переменной массы являются следствием законов Ньютона, тем не менее, эти уравнения представляют самостоятельный интерес, главным образом как теоретическая основа ракетной техники.

Вывод уравнения движения тела переменной массы рассмотрим на примере движения простейшей ракеты. Будем рассматривать ракету как достаточно малое тело, положение центра масс которого не изменяется по мере сгорания топлива. В этом случае ее можно считать материальной точкой переменной массы, положение которой совпадает с центром масс. Будем считать, что вылетающая из ракеты частица газа массой dm взаимодействует с ней только в момент отделения. Примем также, что изменение массы ракеты происходит непрерывно, без скачков, т.е. существует производная массы по времени, которая характеризует быстроту изменения массы dm/dt.

Пусть в момент времени t ракета с топливом имеет массу m, скорость относительно неподвижной системы отсчета (Земли) $\vec{\upsilon}$ и импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. За время dt от ракеты отделяется некоторая масса газа dm, скорость которой относительно ракеты $\vec{u}$. Относительно выбранной нами неподвижной системы отсчета ее скорость будет $\vec{u}+\vec{\upsilon}$, а импульс $\vec{p}_{Г}=dm\left(\vec{u}+\vec{\upsilon}\right)$. Масса ракеты станет $m-dm$, скорость $\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}$, а импульс $\vec{p}_{р}=\left(m-dm\right)\left(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}\right)$.

В общем случае на ракету будут действовать внешние силы, в числе которых силы гравитационного притяжения Земли, Солнца и планет, а также сила сопротивления среды, в которой она движется. В соответствии с основным законом динамики изменение импульса системы (ракета–выбрасываемые газы) равно импульсу результирующей внешних сил ($d\vec{p}=\vec{F}dt$) или

$$\left(m-dm\right)\left(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}\right)+dm\left(\vec{u}+\vec{\upsilon}\right)-m\vec{\upsilon}=\vec{F}dt\cdot$$

Раскрыв скобки и, пренебрегая произведением $dmd\vec{\upsilon}$ как бесконечно малой величиной высшего порядка, получим:

$$md\vec{\upsilon}+dm\vec{u}=\vec{F}dt\cdot$$

Разделив последнее соотношение на dt, получим уравнение

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}-\vec{u}\frac{dm}{dt}\cdot$$

Это *уравнение динамики тела переменной массы* впервые было получено профессором Петербургского политехнического института И.В. Мещерским и носит его имя.

Сравнивая полученное уравнение со вторым законом Ньютона, отметим, что левая часть представляет собой произведение массы и ускорения ракеты. Следовательно, справа должна стоять сумма сил, которые действуют на ракету. Отсюда приходим к выводу, что второе слагаемое в правой части также выражает силу. Для выяснения ее природы рассмотрим случай, когда внешние силы отсутствуют ($\vec{F}=0$), т.е. система ракета–выбрасываемые газы является замкнутой. На основе закона сохранения импульса можно утверждать, что суммарный импульс системы остается неизменным. В этом случае получаем соотношение $md\vec{\upsilon} = -dm\vec{u}$, на основе которого можно сделать вывод о том, что ракета получает такое же приращение импульса, как и выбрасываемые газы, только в противоположном направлении. Причиной изменения импульсов отдельных частей замкнутой системы могут быть только внутренние силы, действующие между ними. Таким образом, на ракету со стороны газов действует сила

$$\vec{F}_p = -\vec{u}\frac{dm}{dt}\cdot$$

Эта сила называется *реактивной*. Она прямо пропорциональна быстроте изменения массы тела dm/dt и относительной скорости отделяемых частиц u и направлена в сторону, противоположную вектору $\vec{u}$. Величину $\mu = dm/dt$ называют *расходом* газа или жидкости.

Использование реактивной силы лежит в основе работы реактивных двигателей, которые делятся на два основных класса: ракетные и воздушно-реактивные.

Рис. 8.1

Единственным двигателем, который обеспечивает управляемое движение аппарата в космическом пространстве, является *ракетный*. Значительную часть корпуса ракеты занимают горючее и окислитель (рис. 8.1). Реактивная сила возникает в результате вытекания продуктов сгорания через отверстие (сопло), которое сужается для увеличения скорости вытекания $\vec{u}$. В ракетах используется как жидкое, так и твердое топливо, содержащее в себе горючее и окислитель.

Воздушно-реактивные двигатели работают по принципу одновременного присоединения и отделения частиц.

Двигатели этого типа делятся на турбореактивные и прямоточные. В носовой части турбореактивного двигателя размещен компрессор, засасывающий и сжимающий воздух, который затем поступает в камеру сгорания и служит окислителем для жидкого горючего, подаваемого с помощью форсунок (рис. 8.2). Продукты сгорания, проходя через сопло, вращают турбину, которая приводит в действие компрессор. Прямоточный двигатель не имеет компрессора и газовой турбины. Воздух засасывается исключительно благодаря движению самолета. Этот двигатель, в отличие от турбореактивного, не создает тяги, когда самолет неподвижный, и может использоваться на сверхзвуковых самолетах в сочетании с двигателями других типов.

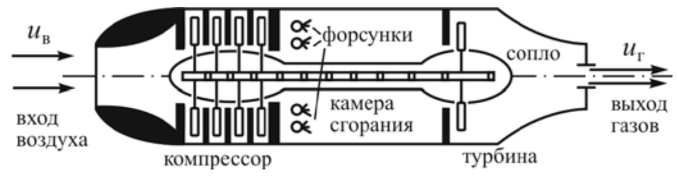

Рис. 8.2

Применим уравнение Мещерского к частному случаю движения ракеты, когда на нее не действуют внешние силы. Движение ракеты происходит под действием только реактивной силы. Направим ось X по оси ракеты, совместив ее с направлением полета. В проекции на эту ось уравнение Мещерского примет вид:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -u\frac{dm}{dt}\cdot$$

Разделив на m и сокращая dt, получим: $d\upsilon = udm/m$. Для нахождения скорости ракеты через время t после начала движения проинтегрируем это выражение, учитывая, что за время t скорость увеличивается от 0 до υ, а масса уменьшается от m_0 до m:

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = -u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}\cdot$$

Отсюда получаем формулу для расчета конечной скорости ракеты

$$\upsilon = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right),$$

где m_0 – начальная масса ракеты вместе с топливом; m – конечная масса ракеты.

Эта формула была получена в 1903 г. К.Э. Циолковским и носит его имя. Из нее следует, что конечная скорость, приобретаемая ракетой при отсутствии внешних сил, не зависит от закона изменения массы и ограничена только отношением начальной и конечной масс ракеты.

Полученная формула позволяет оценить максимальную скорость, которую может развить ракета, если предположить, что внешние силы не действуют. Предельная относительная скорость истечения газов через сопло $u_м$ определяется химическим составом и температурой сгорания топлива и обычно не превосходит 3–4 км/с. Максимальное значение отношения масс m_0 / m ограничено прочностью конструкции, и для современных материалов ее можно принять ≈ 10. Тогда предельная скорость простейшей одноступенчатой ракеты не превысит 7 км/с, что меньше первой космической скорости.

Для получения космических скоростей Циолковский предложил использовать многоступенчатые ракеты, которые представляют собой несколько «посаженных» друг на друга ракет. Когда горючее первой ракеты (ступени) полностью использовано, она отделяется и начинают работать двигатели второй ступени и т.д. Для запуска космических кораблей и искусственных спутников применяются трехступенчатые ракеты.

В настоящее время ведутся интенсивные работы по созданию новых типов ракетных двигателей, которые принципиально отличаются от твердотельных и жидкостных реактивных двигателей. В атомных двигателях рабочее вещество нагревается в ядерном реакторе и затем вытекает через сопло. В ионном ракетном двигателе реактивная сила тяги создается в результате выбрасывания из двигателя заряженных частиц – ионов, которые предварительно разгоняются в электрическом поле до больших скоростей.

Повседневный опыт убеждает нас в том, что перемещения тел происходят только под действием сил. Поэтому возникает необходимость дать количественную характеристику действия этих сил, которое связано с перемещением тел. В физике такой характеристикой является *работа силы*, которая определяет количественную меру передачи движения от одного тела (системы тел) к другому телу (системе тел) под действием силы.

Под работой в механике понимают физическую скалярную величину, которая характеризует процесс перемещения тела под действием силы. Если материальная точка под действием постоянной силы $\vec{F}$ совершила бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$, то элементарная работа этой силы

$$\delta A = F\, dr \cos\alpha ,$$

где α – угол между направлениями векторов силы и перемещения. Эту формулу можно записать в виде скалярного произведения

$$\delta A = \vec{F}\, d\vec{r} ,$$

т.е. элементарная работа постоянной силы определяется скалярным произведением вектора силы и вектора перемещения.

Обратим внимание, что элементарная работа обозначена δA, а не полным дифференциалом dA. Это связано с тем, что в общем случае работа не является однозначной функцией состояния, т.е. она может зависеть не только от начального и конечного состояний, но и от того, по какому пути происходит перемещение материальной точки. Другими словами, работа не является функцией состояния, а является функцией процесса. Исключение из этого составляет особый класс сил, называемых *консервативными*, которые более подробно будут рассмотрены в дальнейшем.

При прямолинейном движении тела под действием постоянной силы $\vec{F}$ модуль вектора перемещения равен пути: $\left|\Delta\vec{r}\right| = s$. В этом случае

$$A = Fs\cos\alpha = F_s s ,$$

где $F_s = S\cos\alpha$ – проекция силы на направление движения.

Если угол $\alpha < 90^0$, то $\cos\alpha > 0$ и работа силы положительная; при $\alpha > 90^0$ ($\cos\alpha < 0$) и работа силы отрицательная. Если $\alpha = 90^0$, то $\cos\alpha = 0$ и работа силы равна 0. В случае, когда перемещение равно нулю, работа силы также равна нулю. В частности, если человек стоит неподвижно и держит какой-нибудь груз, то работа мускульной силы равна нулю. В данном случае имеет место выполнение биохимической работы.

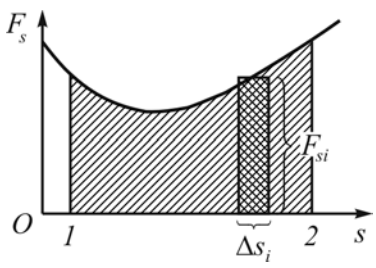

Рис. 8.3

Если сила, действующая на тело во время его движения, переменная, то для подсчета работы силы необходимо весь путь s разбить на элементарные (не обязательно одинаковые) участки $\Delta s_i = \left|\Delta\vec{r}_i\right|$, на которых силу можно считать постоянной (рис. 8.3). Работа силы F_{si} на элементарном участке пути Δs_i

$$A_i = F_{si}\Delta s_i \cos\alpha_i .$$

Работа на конечном участке движения *1–2* равна сумме элементарных работ

$$A_{12} = \sum_i A_i .$$

Переходя к пределу при $\Delta s \to 0$, получим:

$$A_{12} = \int_1^2 F\cos\alpha ds = \int_1^2 F_S ds \text{, или}$$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} .$$

Отметим, что численное значение работы, выполненной конкретной силой, зависит от выбора системы отсчета, поскольку перемещение тела в различных системах отсчета разное, т.е. работа является относительной физической величиной.

Графически работа на пути от точки *1* до точки *2* равна площади фигуры, ограниченной ординатами этих точек, осью s и кривой зависимости $F_s = f(s)$ (рис. 8.3). Поскольку работа силы – скалярная величина, то работа суммарной силы равна алгебраической сумме работ составляющих сил.

Все силы, рассматриваемые в механике, подразделяются на два класса: консервативные и неконсервативные. Силы, работа которых не зависит от формы траектории, по которой тела переходят из одного положения в другое, называются *консервативными* или *потенциальными*. Это силы упругости, силы гравитационного притяжения. Силы в том случае консервативны, если в системе нет перехода механического движения в другие формы движения материи.

Механические системы, в которых действуют только консервативные силы, называются *консервативными*. Среди неконсервативных сил выделим *диссипативные силы*. Диссипативными называют такие силы, полная работа которых в замкнутой системе всегда отрицательная. Под действием диссипативных сил определенная часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию тел. Примером диссипативной силы является сила трения.

Для консервативных сил работа является функцией состояния, т.е. может быть представлена в виде разности значений некоторой функции координат и скоростей, а элементарную работу этих сил обозначают полным дифференциалом dA.

На практике часто оказывается важным знать не только величину работы силы, но и скорость, с которой она выполняется. Физическая величина, характеризующая скорость выполнения работы, называется *мощностью*. *Средней мощностью* называют физическую скалярную величину, равную отношению работы к интервалу времени, за который она выполнена

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t} = \frac{Fs\cos\alpha}{t}.$$

Если сила с течением времени изменяется, то мощность также не остается постоянной. В данном случае определяют *мгновенную мощность*

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Поскольку $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$, то

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}.$$

Мгновенная мощность равна скалярному произведению вектора силы и вектора скорости. Из последней формулы видно, что мощность механизма можно повысить за счет увеличения силы тяги или за счет увеличения скорости движения.

В механике изучается простейший вид движения – перемещение тел или частей тела относительно друг друга. В процессе взаимодействия тел происходит обмен механическим движением между телами или его переход в другие формы движения.

Универсальной количественной мерой движения материи при всех его превращениях из одного вида в другой является физическая скалярная величина, называемая *энергией*. Поскольку процесс превращения одного вида движения в другой сопровождается работой, то ее целесообразно выбрать в качестве количественной меры изменения энергии тела, т.е. допустить, что $A = \Delta E$. Энергия – это *функция состояния физической системы*, изменение которой равно работе. Функциями состояния системы называются физические величины, значения которых полностью определяются состоянием физической системы и не зависят от пути перехода в это состояние.

Таким образом, энергия является важнейшей физической величиной, характеризующей способность тела или системы тел совершать работу при определенных условиях.

Состояние механической системы определено, если известно пространственное положение тел системы (их координаты) и скорости всех тел системы. В соответствии с этим в механике рассматриваются только два вида энергии: кинетическая и потенциальная.

Кинетическая энергия – это энергия, которой обладают тела вследствие движения. Определим соотношение между работой силы и кинетической энергией. Пусть под действием силы $\vec{F}$ материальная точка массой m, которая находилась в состоянии покоя, приобретает скорость $\vec{\upsilon}$. В этом случае работа силы идет на увеличение кинетической энергии, причем кинетическая энергия материальной точки возрастает на величину, равную выполненной работе. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}\,.$$

Умножив левую и правую части этого выражения на бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$, получим:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = m\vec{a}d\vec{r}\,.$$

Используя известные соотношения $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$, а также учитывая, что $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \dfrac{1}{2}d\left(\upsilon^2\right)$, предыдущее равенство можно записать:

$$\delta A = m\left(\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}\right) = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right).$$

Чтобы найти работу силы, под действием которой материальная точка на конечном перемещении приобретает скорость $\vec{\upsilon}$, проинтегрируем правую и левую части последнего равенства с учетом возрастания скорости от нуля до υ:

$$A = \int_0^{\upsilon} m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \frac{m\upsilon^2}{2}\,.$$

Полученная работа $A = E_к = m\upsilon^2/2$, необходимая для приобретения точкой скорости υ, называется кинетической энергией материальной точки.

Полная работа равнодействующей силы для изменения скорости материальной точки от значения υ_1 до υ_2 определится по формуле

$$A_{12} = m\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

или

$$A_{12} = E_{\kappa 2} - E_{\kappa 1}.$$

Таким образом, работа равнодействующей всех сил, приложенных к материальной точке, равна изменению кинетической энергии точки, которое произошло за время действия сил. Это утверждение называют *теоремой об изменении кинетической энергии*.

Последняя формула показывает, что работа, совершаемая внешними силами, действующими на тело, идет на приращение его кинетической энергии. Если работа положительная ($A > 0$), то $E_{\kappa 2} > E_{\kappa 1}$, т.е. кинетическая энергия тела возрастает. Если же работа отрицательная, то $E_{\kappa 2} - E_{\kappa 1} < 0$ и кинетическая энергия тела уменьшается. Скорость движения тела, как известно, зависит от выбора системы отсчета, поэтому кинетическая энергия также зависит от выбора системы отсчета, т.е. является величиной относительной. Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий тел, которые образуют систему

$$E_\kappa = \sum_i E_{\kappa i}.$$

Кинетическая энергия тела не зависит от способа, которым она была ему сообщена, а определяется только величиной скорости при постоянной массе тела (или импульса)

$$E_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Определим потенциальную энергию тела массой m, поднятого на некоторую высоту в однородном гравитационном поле Земли. Для этого

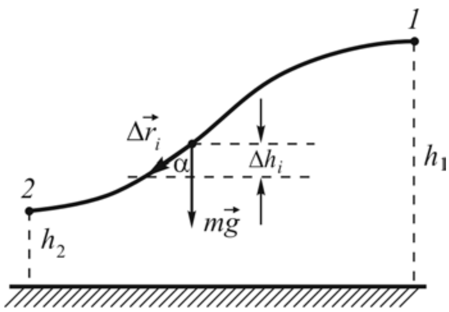

Рис. 8.4

вычислим работу силы тяжести, которую она выполняет при перемещении этого тела из положения *1* в положение *2* (рис. 8.4). Высоты h_1 и h_2 выбраны относительно произвольного нулевого уровня отсчета. Разобьем весь путь горизонтальными плоскостями на такие малые участки, чтобы каждый из них можно было считать прямолинейным. Очевидно, что работа силы тяжести при элементарном перемещении $\Delta\vec{r}_i$

$$A_i = mg\Delta r_i \cos\alpha_i = mg\Delta h_i .$$

Полная работа силы тяжести при перемещении тела из положения *1* в положение *2*

$$A_{12} = \sum_i A_i = mg\sum_i \Delta h_i = mg\left(h_1 - h_2\right)$$

или

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2 = E_{n1} - E_{n2},$$

где $E_{n1} = mgh_1$ и $E_{n2} = mgh_2$ – *потенциальная энергия тела* в поле силы тяжести на высотах h_1 и h_2 относительно некоторого уровня.

Из последнего выражения следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории движения тела, а определяется только положением начальной и конечной точек перемещения относительно нулевого уровня. Таким образом, в соответствии с определением, сделанным ранее, сила тяжести является консервативной силой. Если нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принят на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела (при $h << R_З$, где $R_З$ – радиус Земли)

$$E_n = mgh .$$

Потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной – в зависимости от размещения точки отсчета по отношению к нулевому уровню. В нашем примере сила тяжести выполняет положительную работу. При этом потенциальная энергия механической системы Земля–тело уменьшается:

$$A = -\Delta E_n = E_{n1} - E_{n2}\,.$$

Как видно из рассмотренного примера, потенциальная энергия механической системы может быть определена, если указаны взаимное расположение тел в системе (координаты тел) и силы, действующие между ними.

Изменение потенциальной энергии системы взаимодействующих тел численно равно работе, выполняемой консервативными силами при переводе системы без изменения скорости из одного состояния в другое с новым размещением (конфигурацией) тел. Потенциальную энергию одного из состояний системы тел условно принимают равной нулю. В этом случае предполагают, что тела не взаимодействуют друг с другом. Выбор нулевого уровня отсчета потенциальной энергии произвольный. Поскольку потенциальная энергия определяется силами, значения которых зависят от вида, взаимодействия и от расстояния между взаимодействующими телами, то единой универсальной формулы, позволяющей определить потенциальную энергию, не существует. Еще раз подчеркнем, что потенциальную энергию имеет физическая система, состоящая как минимум из двух взаимодействующих тел. Если говорят о потенциальной энергии одного тела, то в этом случае понимают энергию, которая определяется взаимным расположением частей этого тела.

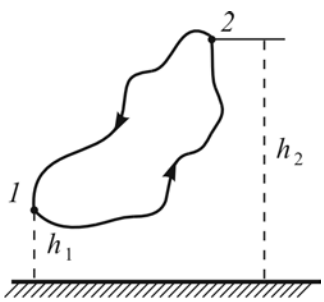

Рис. 8.5

Из независимости работы силы тяжести от формы траектории следует, что ее работа на замкнутом пути равна нулю. Пусть тело движется в однородном гравитационном поле по замкнутому пути (рис. 8.5). Поскольку в конце движения тело оказывается вновь в исходной точке (например, в точке *2*), то $A = mgh_2 - mgh_2 = 0$. Величина потенциальной энергии зависит от выбора нулевого уровня отсчета, поэтому важно знать не абсолютное значение потенциальной энергии, а ее изменение при переходе механической системы из одного состояния в другое. Если нулевой уровень отсчета выбрать в бесконечности, то потенциальная энергия тела, которое находится в гравитационном поле Земли, всегда будет отрицательна

$$E_n = -G\frac{mM}{R},$$

где R – расстояние от центра Земли до тела.

Выясним связь силы с потенциальной энергией. Рассмотрим механическую систему, в которой действуют только консервативные силы. Элементарная работа консервативной силы, действующей на тело, равна уменьшению потенциальной энергии

$$dA = -dE_n$$

или

$$F_s ds = -dE_n.$$

Отсюда

$$F_s = -\frac{dE_n}{ds}.$$

Из полученного соотношения следует, что проекция силы на направление движения тела равна быстроте изменения потенциальной энергии на бесконечно малом отрезке вдоль этого направления. Знак «минус» в формуле показывает, что сила направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии. Если известна зависимость потенциальной энергии от координат, то можно сделать ряд выводов о характере движения тела.